

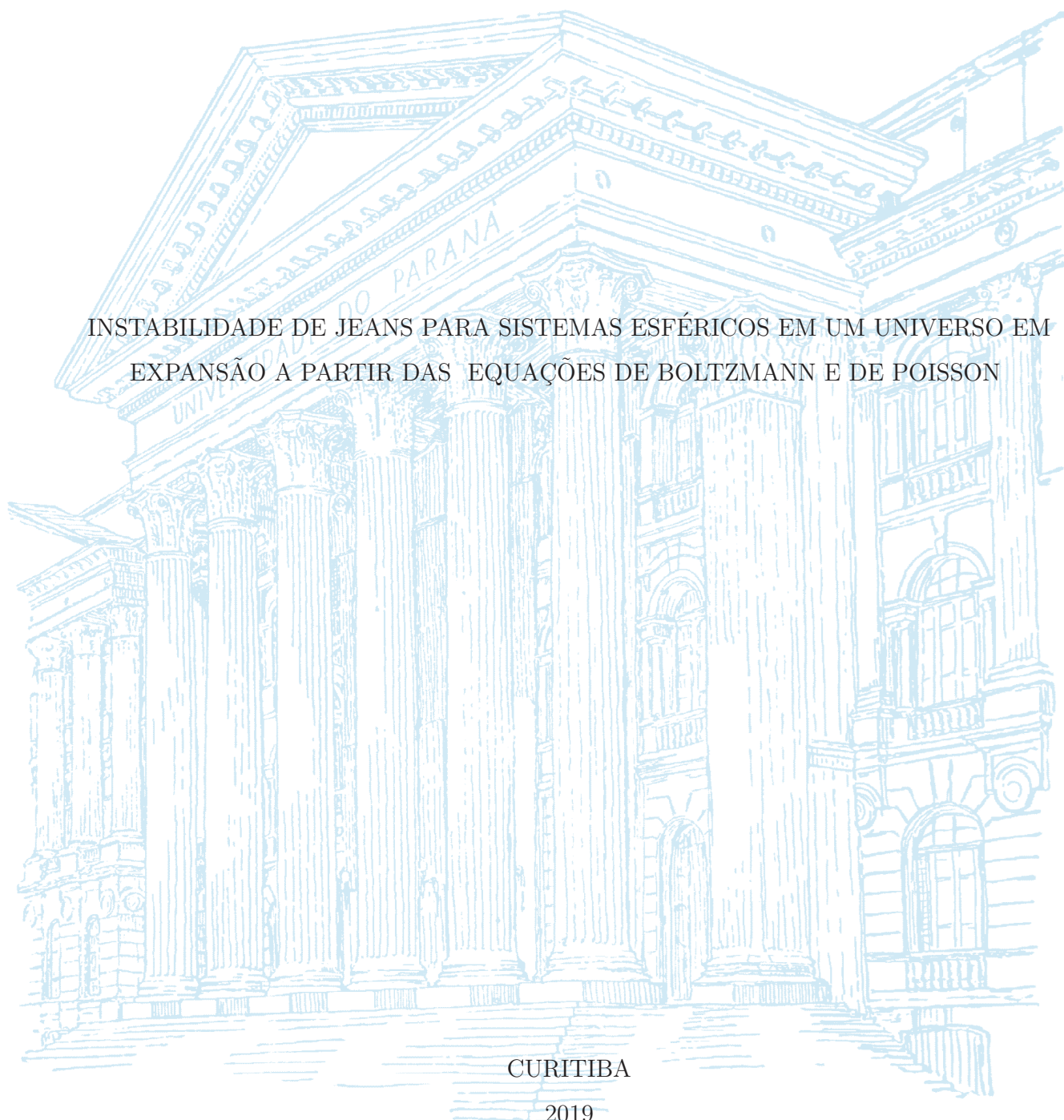
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ELBERTH MANFRON SCHIEFER

INSTABILIDADE DE JEANS PARA SISTEMAS ESFÉRICOS EM UM UNIVERSO EM
EXPANSÃO A PARTIR DAS EQUAÇÕES DE BOLTZMANN E DE POISSON

CURITIBA

2019



ELBERTH MANFRON SCHIEFER

INSTABILIDADE DE JEANS PARA SISTEMAS ESFÉRICOS EM UM UNIVERSO EM
EXPANSÃO A PARTIR DAS EQUAÇÕES DE BOLTZMANN E DE POISSON

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação
em Física, Setor de Ciências Exatas, Universidade
Federal do Paraná, como requisito parcial à ob-
tenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer

CURITIBA

2019

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

S332i

Schiefer, Elberth Manfron

Instabilidade de Jeans para sistemas esféricos em um universo em expansão a partir das equações de Boltzmann e de Poisson [recurso eletrônico] / Elberth Manfron Schiefer. – Curitiba, 2019.

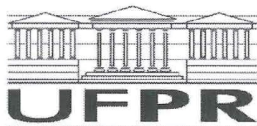
Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2019.

Orientador: Gilberto Medeiros Kremer .

1. Teoria do Transporte. 2. Equação de Poisson. 3. Espalhamento (Física). 4. Instabilidade de Jeans. I. Universidade Federal do Paraná. II. Kremer, Gilberto Medeiros. III. Título.

CDD: 530.124

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO FÍSICA - 40001016020P4


TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **ELBERTH MANFRON SCHIEFER** intitulada: "**Instabilidade de Jeans para Sistemas Esféricos em um Universo em Expansão a partir das Equações de Boltzmann e de Poisson**", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 26 de Fevereiro de 2019.


GILBERTO MEDEIROS KREMER
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)


LUIS RAUL WEBER ABRAMO
Avaliador Externo (USP)


RICARDO LUIZ VIANA
Avaliador Interno (UFPR)

Aos que se mantiveram ao meu lado.

AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Doutor Gilberto Medeiros Kremer pela orientação, apoio e, acima de tudo, compreensão.
- À Andressa Flores Santos pelo apoio infinito.
- Aos meus pais, familiares e amigos que sempre estiveram lá quando precisei.
- Ao Programa de Pós-graduação em Física e à CAPES pelo suporte financeiro.

”Eu não sou livre, e sim às vezes constrangido por pressões estranhas a mim, outras vezes por convicções íntimas.” A. Einstein

RESUMO

A instabilidade de Jeans é investigada para um sistema esférico por intermédio das equações de Boltzmann e de Poisson a partir de um método recém desenvolvido que utiliza os invariantes de colisão da equação de Boltzmann. Dois sistemas são analisados neste contexto: (i) o primeiro caso procura verificar os efeitos da razão das velocidades de dispersão e da razão das densidades da matéria bariônica e da matéria escura sobre um sistema submetido à expansão acelerada do fundo (*background*) e comparar estes resultados à resultados teóricos para um *background* estático; (ii) o segundo retorna à situação em que existe um só componente em um *background* em expansão, mas, agora, incluindo a colisão entre as próprias partículas a partir do modelo descrito por Bhatnagar, Gross e Krook (BGK), tendo como variável a frequência de colisão. O caso com matéria bariônica e matéria escura indicou, como o esperado, uma redução da massa de Jeans quando comparado a um sistema de um só componente. Esta redução se acentua de forma menos intensa em relação à razão das velocidades de dispersão da matéria escura pela matéria bariônica do que quando comparada ao caso do *background* estático. O segundo sistema composto por um só componente em um *background* em expansão com colisões entre suas partículas também comportou-se conforme se esperava. O aumento da frequência de colisão ocasionou uma redução na intensidade da propagação dos contrastes de densidade do sistema, fenômeno já descrito na teoria de Jeans (em sua descrição tradicional) para o aumento da viscosidade do sistema, corroborando o novo método de descrição a partir dos invariantes de colisão da equação de Boltzmann. Trabalhos futuros visam verificar os efeitos das colisões das partículas em um sistema composto por dois constituintes em um *background* em expansão.

Palavras-chave: Instabilidade de Jeans. Velocidades de dispersão. Equação de Boltzmann. Equação de Poisson. Modelo BGK.

ABSTRACT

The Jeans instability of a spherical system is evaluated through the Boltzmann and Poisson equations by a recently developed technique, which makes use of the collision invariant quantities from the Boltzmann equation. Two systems are investigated in this context: (i) The first case focuses on verifying the effects of the dispersion velocities and densities ratio of the dark and baryonic matter over a system submitted to an accelerated expansion of the background and comparing those results to previously described effects over a static background; (ii) The second one returns to the case where only a single component is located in a system submitted to an expanding background, however, containing collisions among its particles. This collision is inserted through a new variable (collision frequency) in the BGK model, previously developed and described by Bhatnagar, Gross, and Krook. The system composed by dark and baryonic matter indicated, as it was expected, a reduction of the Jeans mass when compared to the single component model. This reduction is less intense, according to the dispersion velocities of dark and baryonic matter ratio when compared to a case with a static background. The second one composed by a single component in an expanding background with collisions among its particles also behaved according to the expectations. The raise of the collision frequency brought a reduction in the intensity of propagation of the contrast densities, an already described phenomenon given by the ordinary Jeans instability deductions to the increase of viscosity, corroborating the new method of describing the Jeans instability by the collision invariant quantities of the Boltzmann equation. Future works shall analyze the effects of collisions for a two components system inserted in an expanding background.

Keywords: Jeans Instability. Dispersion velocities. Boltzmann equation. Poisson equation. BGK model.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	Da Relatividade Geral à Cosmologia	3
2.1	O Movimento	3
2.2	Tensor Métrico	4
2.3	Tensor de Curvatura e Escalar de Ricci	5
2.4	As Equações de Campo de Einstein	7
2.5	A Métrica de FLRW	8
2.5.1	Equações de Friedmann e da Aceleração	9
2.6	O Redshift	12
3	Estado da Arte e Embasamento Teórico	14
3.1	Formação de Galáxias	14
3.2	Instabilidade de Jeans na Formação de Galáxias	16
3.3	Breve Revisão Cronológica de Literatura	18
3.4	A Instabilidade de Jeans na Teoria Newtoniana em uma Cosmologia tipo EdS	20
3.5	A Equação de Boltzmann	23
3.5.1	A Equação de Transporte	29
3.5.2	Equações de Balanço	30
3.5.3	A função distribuição de Maxwell	31
3.5.4	O Modelo BGK	32

3.6	Instabilidade de Jeans para um Componente não Colisional na Teoria Newtoniana em uma Cosmologia tipo EdS a partir da Equação de Boltzmann . . .	34
3.7	Formalismo não Linear: O Colapso Esférico tipo <i>Top-Hat</i> e a Virialização . .	37
3.8	Velocidades de Dispersão	41
4	Instabilidade de Jeans para um Sistema Composto por Matéria Bariônica e Matéria Escura não Colisionais em uma Cosmologia EdS a partir da Equação de Boltzmann	49
4.1	Desenvolvimento Teórico do Modelo	49
4.2	Análise dos Impactos da razão σ_d/σ_b sobre a Evolução dos Contrastes de Densidade	52
4.3	Análise da Massa de Jeans do Modelo Proposto	56
4.4	Discussão	61
5	Instabilidade de Jeans para um Sistema Composto por Matéria Escura Auto-interagente em uma Cosmologia EdS a partir da Equação de Boltzmann	63
5.1	Desenvolvimento Teórico do Modelo	63
5.2	Análise dos Impactos de μ_d sobre a Evolução do Contraste de Densidade . .	66
5.3	Discussão	68
6	Conclusões	69
6.1	Conclusões acerca do Modelo Composto por ME e MB não Colisionais em uma Cosmologia EdS	69
6.2	Conclusões acerca do Modelo Composto por ME Auto-Interagente em uma Cosmologia EdS	72
6.3	Discussões Finais	74
	Referências	75

1

Introdução

Com a finalidade de descrever o universo como um todo, Einstein, em 1905, propôs a teoria da Relatividade Restrita que busca interligar o espaço ao tempo no chamado "tecido espaço-tempo" [1]. Dez anos após o desenvolvimento desta teoria, Einstein descreveu uma nova teoria denominada Relatividade Geral (RG) que associa a distribuição de massa a uma deformação geométrica no tecido espaço-tempo [2].

A Teoria da RG resolveu diversos problemas, tais como a curvatura da luz ao redor de corpos massivos [3, 4], a descrição da órbita de Mercúrio [5] e da propagação das ondas gravitacionais [6], sendo esta última detectada no início de 2016 [7].

Uma descrição do universo sob a RG utiliza a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker que assume a isotropia (simetria de rotação) e a homogeneidade (simetria de translação) como sendo princípios cosmológicos que geram o Modelo Cosmológico Padrão ou *Standard Cosmological Model* (SCM), tais quais concordam com aferições em escalas da ordem de $3 \times 10^{21} \text{ km}$ [8] e, por intermédio da radiação cósmica de fundo (forma de radiação eletromagnética conhecida como CMB, do inglês, *Cosmic Microwave Background*), com tempos iniciais do universo [9].

Já no início dos anos 1960, a detecção da CMB indicou que o universo poderia ser regido pelo modelo do Big Bang e que, 380 mil anos após o Big Bang, pequenas inomogeneidades de temperatura estariam presentes no universo [10].

Ainda em 1902, James Jeans descreveu a chamada teoria da Instabilidade Gravitacional (ou teoria da Instabilidade de Jeans) que descreve a indução do colapso de estruturas por

intermédio de pequenas perturbações [11] comumente associadas às inomogeneidades de temperatura presentes no universo primitivo.

Bonnor, em 1956, descreveu que a Instabilidade de Jeans em um universo em expansão poderia originar as primeiras estruturas do universo, tais como aglomerados de galáxias (*clusters* de galáxias) ou grandes estruturas, tais como galáxias, a partir de pequenas perturbações presentes no universo primordial [12].

A formação de grandes estruturas é de grande importância para compreender a variedade de morfologias de galáxias hoje existentes e, principalmente, o motivo pelo qual se formaram em um universo ainda muito jovem.

Cosmólogos acreditam que a principal razão para que as galáxias tenham se formado em um período relativamente primitivo se deve à presença de uma matéria desconhecida, a qual denominam matéria escura (ME).

Desta maneira, o presente trabalho foi estruturado de forma a apresentar um breve resumo acerca da Relatividade Geral e suas aplicações em modelos cosmológicos, tais como Λ CDM e EdS, no capítulo 2. O capítulo 3 descreve a formação de estruturas de grandes escalas, características essenciais destas estruturas e uma breve revisão cronológica de literatura acompanhada de exemplos e desenvolvimentos teóricos, incluindo discussões acerca da equação de Boltzmann.

A Revisão de literatura busca motivar o desenvolvimento do capítulo 4, o qual descreve a Instabilidade de Jeans para um sistema de dois componentes (matéria comum, também conhecida como matéria bariônica (MB), e ME) em um universo em expansão a partir das equações Boltzmann e de Poisson não relativísticas e verifica suas influências na formação de estruturas de grandes escalas.

O capítulo 5 busca descrever os efeitos de um sistema composto por ME auto-interagente e, por fim, o capítulo 6 discute os desenvolvimentos realizados no presente trabalho.

2

Da Relatividade Geral à Cosmologia

2.1 O Movimento

Dez anos após o desenvolvimento da Relatividade Restrita, Einstein propôs uma nova teoria com a finalidade de generalizar o princípio da relatividade, indicando que a matéria seria capaz de curvar a geometria do espaço-tempo e denominou-a de Teoria da Relatividade Geral.

Tendo como primeiro postulado a equivalência física entre campos gravitacionais e sistemas acelerados (Princípio da Equivalência), Einstein deixou de contar com a Relatividade Restrita e construiu uma ideia generalizada acerca da influência da matéria no universo.

Neste contexto, o movimento pode ser compreendido por intermédio da suposição da atuação de um campo gravitacional sobre uma partícula livre em um sistema comóvel de coordenadas χ^α em que $\partial^2 \chi^\alpha / \partial \tau^2 = 0$, onde τ é o tempo próprio dado por $d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\chi^\alpha d\chi^\beta$ com $\eta_{\alpha\beta}$ sendo

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \alpha = \beta = 1, 2 \text{ ou } 3 \\ -1 & \alpha = \beta = 0 \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (2.1)$$

em respeito às transformações de Lorentz.

Relacionando o sistema de coordenadas χ^α com um sistema de coordenadas cartesianas

em repouso (x^μ), de maneira que

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \chi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \chi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.2)$$

que, quando multiplicado por $\partial x^\lambda / \partial \chi^\alpha$ e utilizando a regra do produto

$$\frac{\partial \chi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \chi^\alpha} = \delta_\mu^\lambda, \quad (2.3)$$

resulta na equação do movimento dada por

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \chi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \chi^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.4)$$

Contudo, na literatura, define-se a primeira parte do segundo termo do lado esquerdo da equação (2.3) como sendo a conexão afim (*affine connection*) $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, portanto, o movimento é regido pela equação

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.5)$$

2.2 Tensor Métrico

O tempo próprio (ou tempo aferido no referencial em questão) também pode ser descrito como

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \chi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.6)$$

onde se define

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \chi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.7)$$

e, utilizando a métrica de Minkowski da Relatividade Restrita no referencial inercial, o elemento de linha (ds^2) que mede a distância entre dois pontos é $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\chi^\alpha d\chi^\beta$, ou, seguindo o mesmo procedimento do item anterior, $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

A equação (2.7) é tida como a versão covariante do tensor métrico e sua versão contravariante é dada por

$$g^{\sigma\mu} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \chi^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial \chi^\beta}, \quad (2.8)$$

portanto o produto de (2.7) e (2.8) resulta em $g^{\sigma\mu} g_{\mu\nu} = \delta_\nu^\sigma$, já que $\eta_{\sigma\alpha} \eta^{\alpha\beta} = \delta_\sigma^\beta$.

Tomando a equação (2.7) e derivando-a com respeito a x^λ , tem-se que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \chi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \frac{\partial \chi^\beta}{\partial x^\mu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \chi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.9)$$

e, retomando as definições de $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ e de $g_{\mu\nu}$, a equação (2.9) se torna

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma g_{\sigma\mu} \quad (2.10)$$

Somando a equação (2.10) com os termos permutados e sabendo que a Γ_{bc}^a é simétrico com a permuta bc para cb (simétrico em relação aos índices inferiores), é possível encontrar que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = g_{\sigma\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma + g_{\sigma\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma + g_{\sigma\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma + g_{\sigma\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - g_{\sigma\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - g_{\sigma\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma = 2\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma g_{\sigma\nu} \quad (2.11)$$

e, quando (2.11) é multiplicada por $g^{\sigma\xi}$ e sabendo que $g^{\sigma\xi} g_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\xi$, torna-se

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\xi = \frac{g^{\xi\nu}}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right) \quad (2.12)$$

finalmente relacionando a conexão afim ao tensor métrico.

2.3 Tensor de Curvatura e Escalar de Ricci

Com o objetivo de construir um tensor do tensor da métrica e suas derivadas (o que não se pode ser realizado com $g_{\mu\nu}$), toma-se a transformação da conexão afim

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\xi} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^\xi + \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\xi} \frac{\partial^2 x'^\xi}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \quad (2.13)$$

isolando as quantidades dependentes da conexão afim, derivando ambos os lados em função de x^κ e subtraindo a mesma equação com ν e κ trocados, tem-se que

$$\left(\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu\xi}}{\partial x'^\omega} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\omega}^{\nu\xi}}{\partial x'^\sigma} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\nu\xi} \Gamma_{\omega\rho}^{\lambda\kappa} + \Gamma_{\lambda\omega}^{\nu\xi} \Gamma_{\sigma\rho}^{\lambda\kappa} \right) = \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\omega} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\omega \Gamma_{\kappa\omega}^\lambda + \Gamma_{\mu\kappa}^\omega \Gamma_{\nu\omega}^\lambda \right) \quad (2.14)$$

que também pode ser descrita como uma regra de transformação

$$\mathcal{R}_{\rho\sigma\omega}^{\nu\xi} = \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\omega} \mathcal{R}_{\mu\nu\kappa}^\lambda \quad (2.15)$$

onde

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\omega \Gamma_{\kappa\omega}^\lambda + \Gamma_{\mu\kappa}^\omega \Gamma_{\nu\omega}^\lambda \quad (2.16)$$

que é conhecido como o tensor curvatura de Riemann-Christoffel [13].

Utilizando a propriedade do tensor métrico de abaixar os índices de um tensor, o denominado tensor curvatura de Riemann-Christoffel covariante assume a forma $g_{\lambda\sigma}\mathcal{R}_{\mu\nu\kappa}^\sigma = \mathcal{R}_{\lambda\mu\nu\kappa}$ que possui as propriedades de ciclicidade, simetria e antissimetria.

Multiplicando a forma covariante do tensor curvatura de Riemann-Christoffel pela forma contravariante do tensor métrico, obtém-se o tensor de Ricci ($\mathcal{R}_{\mu\nu}$), que, quando multiplicado novamente pela forma contravariante do tensor métrico, torna-se o escalar de Ricci (\mathcal{R}) [13].

Reescrevendo, com o auxílio da definição da conexão afim, o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel (2.17)

$$\mathcal{R}_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right) + g_{\omega\sigma} [\Gamma_{\nu\lambda}^\omega \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma - \Gamma_{\kappa\lambda}^\omega \Gamma_{\mu\nu}^\sigma], \quad (2.17)$$

calculando a derivada covariante (em relação à ω) de (2.17), ou seja, $\mathcal{R}_{\lambda\mu\nu\kappa;\omega}$, obtém-se

$$\mathcal{R}_{\lambda\mu\nu\kappa;\omega} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\omega} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right) \quad (2.18)$$

e, permutando μ , κ e ω ciclicamente, emergem as identidades de Bianchi [13]

$$\mathcal{R}_{\lambda\mu\nu\kappa;\omega} + \mathcal{R}_{\lambda\mu\omega\nu;\kappa} + \mathcal{R}_{\lambda\mu\kappa\omega;\nu} = 0 \quad (2.19)$$

A forma contraída de (2.19) com $g^{\lambda\nu}$ (cuas derivadas se anulam nos casos propostos em (2.19)) é

$$\mathcal{R}_{\mu\kappa;\omega} - \mathcal{R}_{\mu\omega;\kappa} + \mathcal{R}_{\mu\kappa\omega;\nu}^\nu = 0, \quad (2.20)$$

onde utiliza-se da antissimetria no segundo termo do lado esquerdo da equação (2.20).

Realizando uma nova contração com $g^{\mu\kappa}$ e utilizando novamente a antissimetria, tem-se

$$\mathcal{R}_{;\omega} - \mathcal{R}_{\omega;\mu}^\mu - \mathcal{R}_{\omega;\nu}^\nu = 0 \quad (2.21)$$

a qual é possível ser reescrita na forma

$$\left(\mathcal{R}_\omega^\mu - \frac{\delta_\omega^\mu \mathcal{R}}{2} \right)_{;\mu} = 0 \quad (2.22)$$

ou, como é comumente encontrada na literatura,

$$\left(\mathcal{R}^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu\nu} \mathcal{R}}{2} \right)_{;\mu} = 0 \quad (2.23)$$

quando multiplicada por $g^{\mu\nu}$.

Como descrito anteriormente, $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ é denominado de tensor de Ricci covariante e \mathcal{R} é o escalar de Ricci e ambos podem ser descritos, através de contrações com a métrica, como

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\left(g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)^2 g_{\mu\nu} \right] - \frac{\partial^2 g_\nu^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_\mu^\lambda}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_\lambda^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (2.24)$$

e

$$\mathcal{R} = \left[\left(g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)^2 g_\lambda^\lambda - \frac{\partial^2 g^{\lambda\sigma}}{\partial x^\lambda \partial x^\sigma} \right], \quad (2.25)$$

respectivamente.

2.4 As Equações de Campo de Einstein

Utilizando a ação de Einstein-Hilbert [13], comumente definida como \mathcal{S} , tem-se que

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{-g} \left(-\frac{\mathcal{R}c^3}{16\pi G} + \frac{\mathcal{L}_m}{c} \right) d^4x \quad (2.26)$$

onde $\sqrt{-g}d^4x$ é o elemento invariante, g o determinante da métrica, c a velocidade da luz no vácuo, G a constante gravitacional e \mathcal{L}_m a densidade da lagrangiana da matéria.

Separando a ação na parte gravitacional (\mathcal{S}_G) e na parte da matéria (\mathcal{S}_m), a equação (2.26) se torna

$$\mathcal{S} = \frac{c^3}{16\pi G} \int \mathcal{R} \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x \quad (2.27)$$

onde a primeira parte do lado direito da equação (2.27) representa \mathcal{S}_G e a segunda parte, \mathcal{S}_m .

Realizando a variação de \mathcal{S}_G e \mathcal{S}_m individualmente, encontrando $\delta\mathcal{R}_{\mu\nu}$ de (2.24) e, sendo que $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ de (2.13) se transforma como tensor, definindo sua derivada covariante e, por fim, aplicando o teorema de Gauss, tem-se que

$$\delta\mathcal{S} = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{2c} \int \mathcal{T}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (2.28)$$

onde $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ foi definido como tensor energia-momento das fontes de matéria, de modo que

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.29)$$

Reescrevendo a equação (2.28), emerge

$$\delta\mathcal{S} = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} + \frac{8\pi G}{c^4} \mathcal{T}_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (2.30)$$

e, sendo que a variação da métrica se dá de forma arbitrária, tem-se que os elementos entre parênteses da equação (2.30) devem se anular de acordo com o princípio da mínima ação. Portanto,

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = -\frac{8\pi G}{c^4}\mathcal{T}_{\mu\nu} \quad (2.31)$$

e, normalmente, define-se o lado esquerdo desta equação como sendo o tensor de Einstein ($\mathcal{G}_{\mu\nu}$) [13], donde

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\mathcal{T}_{\mu\nu} \quad (2.32)$$

ou seja, as equações de campo propostas por Einstein descrevem a curvatura gerada no espaço-tempo através de $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ por uma certa distribuição de massa no espaço dada pelo termo de fonte $\mathcal{T}_{\mu\nu}$.

2.5 A Métrica de FLRW

Conforme descrito na introdução deste trabalho, uma descrição comum do universo sob a RG assume a isotropia (uniformidade independente da direção) e a homogeneidade (mesmas evidências observacionais para todas as localizações) como sendo princípios cosmológicos, tais quais concordam com aferições em escalas da ordem de $3 \times 10^{21} \text{ km}$ [8] e, por intermédio da CMB, com tempos iniciais do universo [9].

A CMB nada mais é que um registro eletromagnético da época em que houve o resfriamento dos bárions (matéria composta de prótons e neutrons ou matéria ordinária) em um fluido neutro de radiação e átomos. Este desacoplamento se refere ao momento em que a radiação se desacopla da matéria e ambas podem vagar independentemente pelo universo, preenchendo-o uniformemente e destacando as flutuações de densidade nele presentes [14].

Em grandes escalas, a isotropia e a homogeneidade espacial formam a base para descrição da evolução do universo e, a partir destas, faz-se possível a discussão das simetrias para a métrica e para a distribuição de energia.

Como anteriormente mencionado, a isotropia e a homogeneidade do universo acarretam na hipótese de simetrias na distribuição de energia e matéria nas coordenadas espaciais da métrica. A isotropia pode ser definida como uma simetria de rotação enquanto a homogeneidade pode ser definida como sendo uma simetria de translação mas, apesar de serem distintas,

tais simetrias podem existir concomitantemente em apenas três casos: em um espaço-tempo plano, esférico ou hiperbólico [13].

Tomando a isotropia e a invariância rotacional e agregando a evolução temporal, têm-se o elemento de linha de Robertson-Walker [13, 15]

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.33)$$

onde $a(t)$ é conhecido como o fator de escala que, adiante será definido como $a(t) \equiv a$. Esta equação é também conhecida por elemento de linha de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

2.5.1 Equações de Friedmann e da Aceleração

Sendo que a métrica envolve as equações de campo de Einstein e sendo o objetivo o cálculo a geometria do espaço-tempo produzida por certa distribuição de massa, parte-se da equação (2.34)

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = -\frac{8\pi G}{c^4}\mathcal{T}_{\mu\nu} \quad (2.34)$$

onde $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e \mathcal{R} é o escalar de Ricci, conforme descrito nos itens anteriores.

Retomando a equação (2.7), a qual pode ser apresentada como

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

de maneira que, utilizando as equações (2.12), (2.17) e (2.23), tem-se que

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{a}a}{c(1-kr^2)}; & \Gamma_{22}^0 = \frac{\dot{a}ar^2}{c}; & \Gamma_{33}^0 = \frac{\dot{a}ar^2\sin^2\theta}{c} \\ \Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2}; & \Gamma_{22}^1 = r(kr^2 - 1); & \Gamma_{33}^1 = r(kr^2 - 1)\sin^2\theta \\ \Gamma_{33}^2 = -\sin\theta\cos\theta; & \Gamma_{23}^3 = \cot\theta; & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}; & \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{ac} \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\mathcal{R}_{00} = \frac{3\ddot{a}}{a^2c^2}; \quad \mathcal{R}_{ii} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2}{a^2c^2}g_{ii}; \quad \mathcal{R} = 6\frac{(\ddot{a}a + \dot{a}^2 + kc^2)}{a^2c^2} \quad (2.37)$$

onde $i = 1, 2, 3$.

Retomando a forma do tensor energia-momento de um fluido ideal como sendo

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U_\mu U_\nu - p g_{\mu\nu} \quad (2.38)$$

onde a forma contravariante de U_μ e U_ν representam a velocidade quadridimensional do fluido dados por $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ e $U^\nu = dx^\nu/d\tau$, respectivamente, e ρ é a densidade de energia e p a pressão do fluido.

Quando se considera um sistema de coordenadas comóveis com $U^\mu = U^\nu = (c, 0, 0, 0)$, o tensor energia-momento emerge na forma [13]

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p \frac{a}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pa^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pa^2 r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

com o auxílio das equações (2.36) e (2.37), resolve-se a equação (2.34).

Da componente 00 se obtém

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) - \frac{k^2 c^2}{a^2} \quad (2.40)$$

denominada primeira equação de Friedmann [13].

As componentes mistas zeram e as partes puramente espaciais, juntamente à equação (2.40), resultam em

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho(t) + \frac{3p(t)}{c^2} \right) \quad (2.41)$$

denominada segunda equação de Friedmann ou equação da aceleração.

Reescrevendo a equação (2.40), tem-se que

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G \rho a^2}{3} \quad (2.42)$$

Aplicando a derivada covariante em (2.42) e sabendo da conservação do tensor energia-momento, Weinberg [13] descreve que

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (2.43)$$

que, para ser resolvida, é necessário descrever os componentes inseridos neste sistema. Supondo que as equações supra mencionadas sejam barotrópicas ($p = c^2\omega\rho$, onde ω é uma constante que determina o componente dominante de uma era do universo, onde $\omega = -1$ descreve um universo dominado pela energia de vácuo (era de Planck), seguido pela era da radiação em que $\omega = 1/3$ e então dominado pela matéria em que $\omega = 0$), então, em um sistema composto apenas por matéria, a inserção de $p = 0$, resulta em

$$\dot{\rho} + 3\rho\frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (2.44)$$

ou melhor,

$$\rho \propto a^{-3}, \quad (2.45)$$

A equação (2.42) para um universo espaço-temporalmente plano ($k = 0$) indica que, para a era dominada pela matéria (70 mil anos após o Big Bang) $a \propto t^{2/3}$, portanto a equação (2.45) se torna

$$\rho \propto a^{-3} \propto t^{-2} \quad (2.46)$$

para um universo espaço-temporalmente plano em expansão adiabática na era dominada pela matéria.

Este modelo de FLRW simplificado para $k = 0$ (curvatura nula), $p = 0$ e composto puramente por matéria, foi descrito por Einstein e de Sitter em 1932 e ficou conhecido como Universo Einstein-deSitter (EdS) [16].

A dependência do fator de escala da equação de Friedmann é então diretamente interligado à densidade total do universo (ρ), a qual supostamente possui contribuições da densidade da MB (ρ_b), ME (ρ_d) [17].

A equação (2.43), conhecida como equação de Friedmann, relaciona a expansão do universo com a densidade e curvatura do mesmo. Esta equação pode ser reescrita na forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (2.47)$$

onde $H = \dot{a}/a$.

Conforme mencionado, um universo espaço-temporalmente plano possui $k = 0$, donde

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G} \equiv \rho_c \quad (2.48)$$

onde ρ_c é conhecida como densidade crítica.

A densidade crítica proporciona uma parametrização para a descrição das densidades dos constituintes no universo e atualmente possui o valor de aproximadamente 10^{-26}kgm^{-3} . A razão entre as densidades de MB e ME (ρ_d/ρ_b) auxilia na obtenção de uma aproximação razoável da representação do universo como um todo, vez que a ME não proporciona muitas informações pois não interage com a MB diretamente (somente indiretamente através da força gravitacional) e nem com a radiação [18].

A *Planck Collaboration* [19], utilizando as medidas do Telescópio Planck da temperatura da CMB e do espectro de energia potencial gravitacional determinaram a relação $\rho_d/\rho_b \approx 5,5$ e, corroborando com este dado, o *Particle Data Group* [20] descreve no item 16, que $\rho_d/\rho_b \approx 5,5$.

Dados da CMB indicam que a vida da partícula da ME deve ser maior que o tempo de Hubble (idade do universo) e, juntamente com a razão anteriormente discutida, indicam que a ME consiste de ao menos uma partícula quase-estável que não está presente no modelo padrão da física de partículas. Uma das mais prováveis candidatas a partículas da ME é uma partícula estável, massiva e neutra, comumente denominada WIMP (Weakly Interacting Massive Particle ou Partícula Massiva Fracamente Interagente) [18, 21, 22].

2.6 O Redshift

A Lei de Hubble foi desenvolvida em 1929 por intermédio de dados observacionais que levaram Edwin Hubble a constatar que várias galáxias se distanciavam da Via Láctea e também se distanciavam entre si. Além de dados qualitativos, Hubble traçou as velocidades de afastamento em função das distâncias entre as galáxias e constatou que, quanto mais distante duas galáxias estão uma da outra, mais rápido elas se afastam, ou seja,

$$\dot{\vec{x}} = H_0 \vec{x} \quad (2.49)$$

onde H_0 indica a inclinação da reta, que hoje é conhecida como tendo o valor $H_0 = 73,24 \pm 1,74 \text{ kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ [23] (um parsec (pc) equivale a aproximadamente 3,26 anos-luz de distância).

Um referencial estacionário terá a coordenada \vec{x}' e se relacionará com as coordenadas

comóveis \vec{x} de acordo com $\vec{x}' = a\vec{x}$, portanto

$$\frac{\dot{a}}{a} = H \quad (2.50)$$

onde H é definido como o parâmetro de Hubble.

A velocidade em função da distância se relaciona e é aferida por intermédio do desvio para o vermelho no espectro eletromagnético, comumente denominado "redshift", cuja descrição provêm do efeito Doppler

$$z = \frac{\lambda_O - \lambda_E}{\lambda_E} \quad (2.51)$$

onde λ_O é o comprimento de onda observado e λ_E é o comprimento de onda emitido.

Quando um comprimento de onda emitido permeia um espaço-tempo em expansão ou em contração, seu comprimento sofrerá um alargamento ou uma retração, respectivamente,

$$\frac{\lambda_O}{\lambda_E} = \frac{a_0}{a} = z + 1 \quad (2.52)$$

onde a_0 é o fator de escala do observador e a é o fator de escala do objeto emissor.

Portanto a relação entre o fator de escala e o *redshift* é comumente presente na literatura como

$$a = \frac{1}{z + 1} \quad (2.53)$$

onde $a_0 = 1$.

Estado da Arte e Embasamento Teórico

3.1 Formação de Galáxias

A identificação e descrição das galáxias iniciou-se nos anos 1840 com a construção do telescópio "Leviathan of Parsonstown" de William Parsons (Lord Oxmantown) na Irlanda. Parsons descreveu a presença do padrão espiral em muitas das galáxias luminosas da nébula Herschel e Messier, com seu telescópio de 1,83 m de altura [24].

Nos anos 1870, as placas de emulsão de brometo de prata secas foram criadas e, nos anos, 1970, as placas Kodak 103a-O se tornaram as placas padrão para a aferição das morfologias galácticas [25].

Em 1929, James Jeans propôs a separação das morfologias galácticas em um diagrama tipo Y (tuning fork) e, em 1929, Hubble publicou seu livro "The Realm of Nebulae" contendo uma descrição acerca do diagrama, mas, somente em 1936, apresentou seu primeiro diagrama [26].

Acredita-se que as primeiras oscilações de temperatura 380 mil anos após o Big Bang geraram, após um bilhão de anos, as primeiras galáxias por intermédio da WICDM (Weakly Interacting Cold Dark Matter ou ME Fria Fracamente Interagente), a qual permitiu o crescimento das primeiras estruturas formando os primeiros halos (envelopes) que culminaram nas primeiras galáxias [27].

O modelo cosmológico padrão Λ Cold Dark Matter (Λ CDM ou Λ ME Fria), onde Λ representa a constante cosmológica associada à energia escura (energia desconhecida que tem como

principal função a aceleração da expansão do universo), descreve a hierarquia de formação das estruturas, tais como as galáxias, por intermédio de fusões de pequenos halos de ME em grandes halos, onde as primeiras galáxias foram o estopim para a formação das demais estruturas do universo [28, 29].

A criação das primeiras galáxias conta com a presença de um halo de ME que engloba a MB e o poço potencial deste halo deve ser suficientemente profundo para reter o gás aquecido a uma temperatura de aproximadamente $10^4 K$ devido à foto-ionização por radiação estelar [30, 31].

Mesmo sabendo que a natureza da partícula da ME seja imprecisa, acredita-se que os primeiros halos de ME colapsaram (virializaram) aproximadamente em $z = 100$. Para WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles ou Partículas Massivas Fracamente Interagentes), a massa de colapso dos primeiros halos é aproximadamente $10^{-6} M_{\odot}$ (10^{-6} Massas solares). Contudo, estas massas requeridas são muito instáveis e não suportariam a foto-ionização e, para suportá-la, seria necessária uma massa próxima de $10^7 M_{\odot}$ [32, 33, 34, 35].

Simulações recentes sugerem que halos de ME contendo $10^8 M_{\odot}$ são capazes de colapsar próximos de $z = 10$ [36, 37]. Observações, incluindo a fotometria do Hubble Space Telescope (HST) e a espectroscopia de solo, são capazes de aferir galáxias presentes em idades inferiores a $z = 7$ [38, 39, 40], tendo seu recorde demarcado em $z = 8,6$ (EGSY8p7) em 2010 [41] e $z = 11,1$ em 2016 [42].

Caso os mini halos sejam os predecessores das primeiras galáxias, estas seriam formadas em tempos muito inferiores a $z = 40$ através da cosmologia Λ CDM, porém, para suportar temperaturas viriais de $10^4 K$, formar-se-iam em tempos anteriores a $z = 15$. [43, 44, 45].

Atualmente, uma galáxia é definida como um sistema gravitacionalmente conectado aproximadamente composto por 10^{11} estrelas, massa aproximada de $10^{42} kg$ e tamanho próximo de $10^{21} m$ [46] e o grande problema da sua formação compreende a geração de halos com massas superiores a $10^9 M_{\odot}$, pois modelos semi-analíticos da formação de galáxias prevêm galáxias luminosas dentre $z = 15$ e $z = 20$ [29, 47].

A real maneira como as galáxias se formaram ainda não é clara, mas é bem aceito que tudo iniciou com a Instabilidade de Jeans, a qual amplifica as flutuações de densidade geradas logo após o Big Bang.

3.2 Instabilidade de Jeans na Formação de Galáxias

Em 1902, Jeans procurou descrever a instabilidade em nuvens de gases para melhor compreender a formação de estruturas como estrelas, planetas e galáxias. O método desenvolvido por Jeans recebeu o nome de "Instabilidade de Jeans", "Instabilidade Gravitacional" ou "Instabilidade Gravitacional de Jeans" [48].

A Instabilidade de Jeans foi desenvolvida para verificar como, em um fluido homogêneo e isotrópico, a flutuação na densidade ($\delta\rho$) e na velocidade (δv) de um sistema envolto por um fluido de fundo (background fluid) se propaga temporalmente. A flutuação na densidade do sistema irá crescer se o efeito da pressão em estabilizar o sistema for menor que a tendência da própria gravidade do sistema em induzir o colapso. Caso não haja uma força predominante, o sistema permanecerá em equilíbrio, conforme ilustra a Figura 3.1.

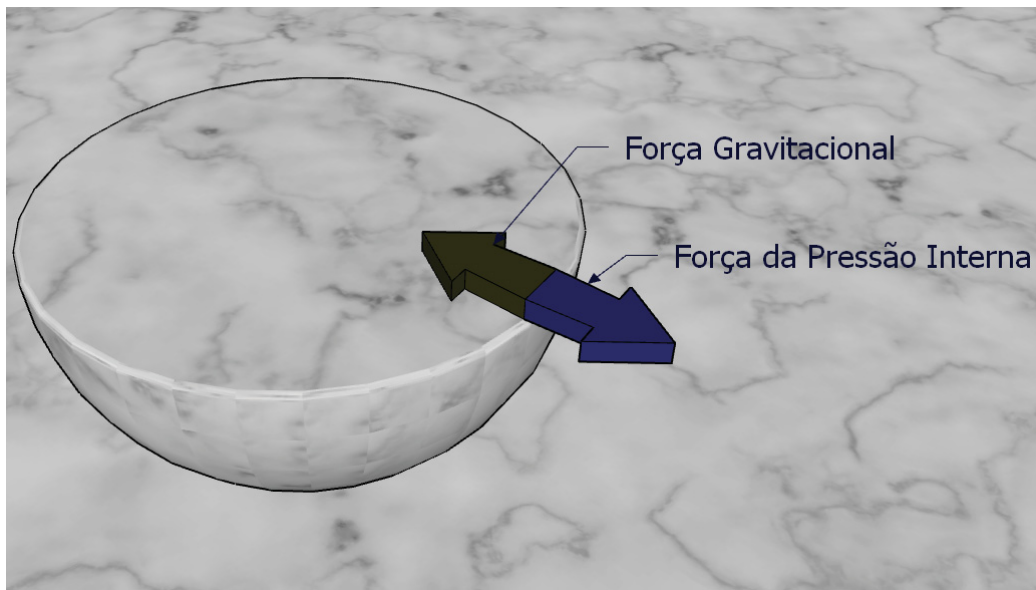


Figura 3.1: Diagrama das forças exercidas sobre o sistema

O raio que separa a instabilidade da estabilidade é comumente denominado comprimento de Jeans (λ_J).

Supondo que um sistema com força gravitacional por unidade de massa F_G , força da pressão interna por unidade de massa F_P , raio λ , densidade ρ , pressão p , velocidade adiabática do som no meio v_s e massa M irá sofrer o colapso se $F_G > F_P$, portanto

$$F_G \propto \frac{GM}{\lambda^2} \propto \frac{G\rho\lambda^3}{\lambda^2} > F_P \propto \frac{p\lambda^2}{\rho\lambda^3} \propto \frac{v_s^2}{\lambda}. \quad (3.1)$$

onde v_s é definida por $v_s = \sigma\sqrt{5/3}$ com σ sendo a velocidade termal de dispersão dada por $\sigma = \sqrt{kT/m}$ onde k é a constante de Boltzmann, T a temperatura e m a massa da partícula em questão.

Desta forma, o limite que iguala F_P e F_G é nada mais que o anteriormente mencionado comprimento de onda de Jeans, neste caso, dado por $\lambda_J = v_s/\sqrt{G\rho}$, mas é comumente encontrado na literatura como sendo $\lambda_J = v_s\sqrt{\pi/G\rho}$. Caso $\lambda < \lambda_J$, o efeito da pressão em um certo volume do sistema será maior que o efeito da própria gravidade e a perturbação se propagará com velocidade v_s e comprimento de onda λ e caso $\lambda > \lambda_J$, haverá a instabilidade.

Outro aspecto determinante da teoria de Jeans é a massa com a qual o sistema colapsa sobre a incidência de uma perturbação. Esta massa é comumente chamada de Massa de Jeans (M_J) que, para um modelo esférico, é dada por

$$M_J = \frac{4}{3}\pi\rho\left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3 \quad (3.2)$$

onde ρ é a densidade do sistema e, sabendo que

$$v_s = \sqrt{\frac{5p}{3\rho}} \quad (3.3)$$

onde v_s é a velocidade adiabática do som e se tem que $p = \rho\sigma^2$ para um gás ideal, então

$$M_J = \frac{1}{6}\pi\rho\left(\frac{5\pi\sigma^2}{3G\rho}\right)^{3/2} \quad (3.4)$$

para um sistema esférico composto por um gás ideal.

Contudo, um dos problemas mais conflitantes acerca desta teoria é o efeito de um universo em expansão na evolução do contraste de densidade não considerado por Jeans em sua teoria), já estudado em diversos modelos cosmológicos, utilizando diferentes metodologias e por grandes nomes como Lifschitz [49], Bonnor [12], Hawking [50] e Weinberg [13].

O modelo linear, ou seja, o modelo em que a perturbação é $\delta \ll 1$ (conforme presente nos trabalhos anteriormente mencionados), não é capaz de explicar a formação das galáxias e das grandes estruturas. Quando estas perturbações se tornam não-lineares ($\delta > 1$), o colapso procede rapidamente via instabilidade gravitacional.

3.3 Breve Revisão Cronológica de Literatura

Conforme descrito nos itens 3.1 e 3.2, a teoria de Jeans descreve a instabilidade de sistemas auto-gravitantes determinando o impacto e evolução de pequenas perturbações incidentes sobre estes sistemas. Os efeitos de um universo em expansão não haviam sido considerados por Jeans e, somente em 1957, Bonnor [12] descreveu a instabilidade de Jeans pelo estudo de pequenas perturbações da densidade e da velocidade em um modelo Newtoniano de um universo em expansão.

Lifschitz [49], Lifschitz e Khalatnikov [51] e Irvine [52] consideraram a aproximação relativística da instabilidade de Jeans e utilizaram perturbações no Tensor métrico. Hawking [50], assim como os anteriores, utilizou a aproximação relativística da equação de Boltzmann aplicada à instabilidade de Jeans, mas perturbou a curvatura do espaço-tempo.

Weinberg [13] solucionou a teoria de Jeans para um universo em expansão com $k = -1$, $k = 0$ e $k = 1$ para partículas não-relativistas no limite Newtoniano e descreveu as diferenças deste modelo para com o modelo da Relatividade Geral.

Binney e Tremaine [53] discutiram sistemas colisionais homogêneos, o "Jeans swindle" que é constituído do descarte do campo gravitacional não perturbado sem justificação formal, soluções instáveis e soluções amortecidas e as suas respostas para sistemas esféricos e sistemas uniformemente rotacionais.

Owen e Villumsen [54] realizaram simulações numéricas de colapsos de sistemas compostos por MB e ME desencadeados por forças gravitacionais, onde previram que o núcleo destes sistemas é dominado pela MB e envolto por um halo de ME.

Peacock [55] descreveu perturbações lineares e perturbações acopladas, tratou sobre as perturbações nas equações de campo de Einstein, manipulou alguns algoritmos de N-corpos em simulações numéricas e discutiu pontos de modelos não lineares.

Coles e Lucchin [48] abordaram a teoria de formação de estruturas desde os princípios básicos da teoria de Jeans (para fluidos colisionais e não-colisionais) e os efeitos de um universo em expansão sobre esta teoria. Discutiram a instabilidade de Jeans para a MB e não-bariônica no caso não-relativista e argumentaram sobre as perturbações cosmológicas e a evolução não-linear.

Trigger [56] trataram a teoria da instabilidade de Jeans cineticamente a partir da equação de Boltzmann não-relativista e com termos de colisão conservando o número de partículas. Identificaram a não interferência dos termos de colisão no critério de instabilidade de Jeans, a não ser no limite entre a estabilidade e a instabilidade, que se mostrou se fortemente dependente da frequência de colisão.

Longair [57] analisou os efeitos de pequenas perturbações e perturbações nas soluções de Friedmann no contexto da instabilidade de Jeans no caso não-relativista.

Capozziello et al. [58] descreveram a dinâmica e o colapso de sistemas auto-gravitantes a partir das equações de Boltzmann não-colisional e não-relativista e de Poisson acopladas derivadas da gravidade $f(R)$ (teoria alternativa de gravidade) em aproximações de campo fraco. As soluções deste trabalho apresentaram modos instáveis que não se encontram na análise padrão da instabilidade de Jeans.

Kremer e André [59] analisaram a dinâmica de um sistema auto-gravitante composto por MB e ME por intermédio da equação de Boltzmann não relativista e da equação de Poisson, onde foi identificado que, quanto maior for a razão da velocidade de dispersão da ME em relação à velocidade de dispersão da MB, maior a região de instabilidade do sistema.

Kremer [60] descreveu e analisou a dinâmica de dois sistemas de fluidos auto-gravitantes pelas equações de Boltzmann não-relativista não-colisional na presença de campos gravitacionais e de Poisson. Primeiramente, foi estudado um sistema composto de MB e ME em um universo estático, onde foi necessário o uso do "swindle" de Jeans para ser solucionado e o mesmo indicou que a massa do sistema combinado foi menor que a massa no caso de um único componente de acordo com a razão σ_d/σ_b

σ_d/σ_b	1, 00	1, 20	1, 40	1, 60	1, 83	2, 00	2, 20
M_J^{db}/M_J^d	0, 9199	0, 8338	0, 7481	0, 6662	0, 5791	0, 5206	0, 4685

Tabela 3.1: Razão da Massa de Jeans de um sistema composto por MB e ME (M_J^{db}) pela Massa de Jeans de um sistema composto puramente de ME (M_J^d) em função da razão σ_d/σ_b conforme presente no trabalho de Kremer [60].

Em seguida, analisou um sistema de único componente em um universo em expansão, onde não foi necessário utilizar o "swindle" de Jeans, a instabilidade de Jeans se viu presente e o comportamento do sistema foi descrito, conforme o item 3.6 deste trabalho.

Os próximos itens do presente trabalho descrevem as bases de resolução do problema da Instabilidade de Jeans. Primeiramente, é analisado um sistema auto-gravitante composto de gás com pressão nula no limite Newtoniano para um universo em expansão a partir das equações da continuidade, de Euler e de Poisson.

Descreve-se também as particularidades da equação de Boltzmann e o modelo descrito por Bhatnagar, Gross e Kruck (BGK). Tal descrição gera a base para a discussão da Instabilidade de Jeans para um componente não colisional na teoria Newtoniana em um universo em expansão a partir da equação de Boltzmann. Por fim, é tratado o formalismo não linear necessário para determinar a relação entre duas quantidades adiante mencionadas.

O modelo BGK, as demonstrações e bases teóricas que seguem criam o fundamento para os capítulos 4 e 5.

3.4 A Instabilidade de Jeans na Teoria Newtoniana em uma Cosmologia tipo EdS

Com o intuito de analisar a dinâmica de um sistema auto-gravitante em um modelo de pressão nula (poeira) no limite Newtoniano para um universo em expansão, dispõe-se de um sistema de equações composto pelas equações da continuidade, de Euler e de Poisson, respectivamente

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \phi = 0 \\ \nabla^2 \phi - 4\pi G \rho = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

associadas à equação da conservação da entropia por unidade de massa ($\partial s / \partial t = \vec{v} \cdot \nabla s$) as quais admitem solução que descreve a expansão ou contração de uma distribuição homogênea e isotrópica de matéria. Objetivando obedecer estas condições para uma cosmologia tipo EdS, tem-se que $\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3$ (conforme a equação (2.44)) onde ρ é a densidade e ρ_0 a densidade

inicial, $\vec{v} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \vec{r}$ onde \vec{v} é a velocidade e \vec{r} é a coordenada física, $\phi = \frac{2\pi G \rho r^2}{3}$ em que ϕ é o potencial gravitacional, $p = p(\rho)$ (barotrópico) em que p é a pressão e $\vec{r} = \left(\frac{a_0}{a}\right) \vec{r}_0$ onde \vec{r}_0 a coordenada comóvel.

Supondo pequenas perturbações na densidade ($\delta\rho$), na velocidade ($\delta\vec{v}$), no potencial gravitacional ($\delta\phi$) e na entropia (δs) em (3.5) e sabendo que os cálculos são realizados no referencial de $\vec{v} = 0$, tem-se que

$$\begin{cases} \dot{\delta\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}\delta\rho + \rho(\nabla \cdot \delta\vec{v}) = 0 \\ \dot{\delta\vec{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\delta\vec{v} + \frac{\nabla\delta p}{\rho} + \nabla\delta\phi = 0 \\ \nabla^2\delta\phi - 4\pi G\delta\rho = 0 \\ \dot{\delta s} + \frac{\dot{a}}{a}(\vec{r} \cdot \nabla)\delta s \end{cases} \quad (3.6)$$

Considerando que estas perturbações assumam a forma de transformadas de Fourier

$$\delta\rho = D(t)\exp[i\vec{k} \cdot \vec{r}]; \quad \delta\vec{v} = \vec{V}(t)\exp[i\vec{k} \cdot \vec{r}]; \quad \delta\phi = \Phi(t)\exp[i\vec{k} \cdot \vec{r}]; \quad \delta s = \Sigma(t)\exp[i\vec{k} \cdot \vec{r}] \quad (3.7)$$

e ressaltando que $k = |\vec{k}|$ depende de a segundo $k = k_0 a_0 / a$ (exprimindo um estiramento do comprimento de onda em um universo em expansão), a equação (3.6) se torna

$$\begin{cases} \dot{D} + \frac{3\dot{a}}{a}D + i\rho\vec{k} \cdot \vec{V} = 0 \\ \dot{\vec{V}} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{V} + i v_s^2 \vec{k} \frac{D}{\rho} + \frac{i\vec{k}}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \Sigma + i\vec{k}\Phi = 0 \\ k^2\Phi + 4\pi G D = 0 \\ \dot{\Sigma} = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

onde $v_s^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$ e a solução com \vec{V} e \vec{k} paralelos (processos adiabáticos que interferem na densidade do sistema) infere que o sistema (3.8) se torne

$$\begin{cases} \dot{D} + \frac{3\dot{a}}{a}D + i\rho k V = 0 \\ \dot{V} + \frac{\dot{a}}{a}V + ik \left(v_s^2 - \frac{4\pi G \rho}{k^2}\right) \frac{D}{\rho} = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Definindo $D = \rho\delta$ (em que $\delta = \rho/\bar{\rho}$ simboliza o contraste de densidade do sistema), a primeira equação do sistema de equações (3.9) se torna $\dot{\delta} + ikV = 0$ e sua derivada primeira

$$\ddot{\delta} + ik \left(\dot{V} - \frac{\dot{a}}{a}V \right) = 0 \quad (3.10)$$

e substituindo os valores de V e \dot{V} na segunda equação do sistema (3.9), tem-se que

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + (v_s^2 k^2 - 4\pi G\rho)\delta = 0 \quad (3.11)$$

de onde se pode substituir $\rho = 1/(6\pi G t^2)$, $a = a_0 t^{2/3}$ e $\dot{a} = 2a/(3t)$

$$\ddot{\delta} + \frac{4\dot{\delta}}{3t} + \frac{2}{3t^2} \left(\frac{v_s^2 k^2}{4\pi G\rho} - 1 \right) \delta = 0, \quad (3.12)$$

retomando que $k \propto 1/t^{2/3}$, $\rho \propto 1/t^2$ e tendo que $v_s \propto 1/t^{2/3}$ e definindo

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}; \quad \lambda_J^0 = v_s^0 \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} \quad (3.13)$$

onde λ_0 é o comprimento de onda da onda incidente sobre o sistema, tendo que

$$\ddot{\delta} + \frac{4\dot{\delta}}{3t} + \frac{2}{3t^2} \left(\frac{\lambda_J^{0^2}}{\lambda_0^2 t^{2/3}} - 1 \right) \delta = 0 \quad (3.14)$$

Definindo $\xi = \lambda_J^0/\lambda_0$, a evolução de δ em função de t e de ξ pode ser observada na figura que segue.

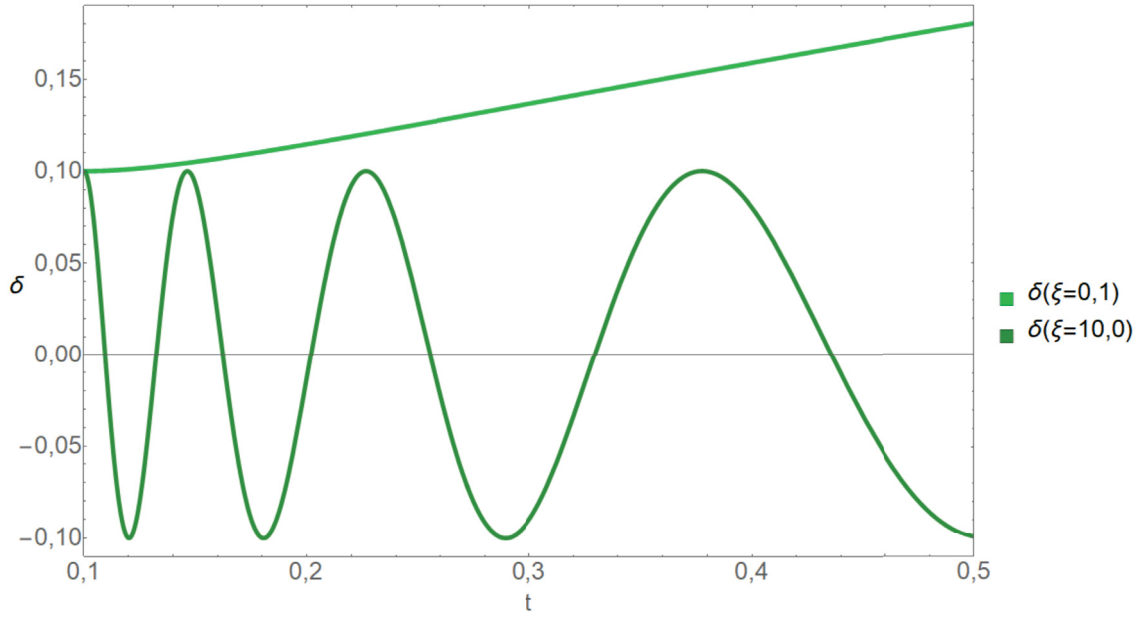


Figura 3.2: Análise da evolução do δ em função do tempo de acordo com os valores 1,0 e 10,0 da variável ξ [48].

A figura 3.2 indica que o limite determinado pelo comprimento de onda de Jeans infere que, se o comprimento de onda da onda incidente (λ_0) for igual ou maior que o comprimento de onda de Jeans (λ_J^0), o sistema tende ao colapso e, do oposto, o sistema apenas sofre oscilações do δ .

Alguns modelos mais complexos fazem uso da equação de Boltzmann não relativística (estudando casos em que as velocidades de dispersão das partículas são muito menores que a velocidade da luz e que os tamanhos dos sistemas sejam relativamente pequenos) e de modelagens baseadas nesta equação, cuja derivação e particularidades são descritas no item que segue, tendo como base o livro de Kremer ([61]).

3.5 A Equação de Boltzmann

Parte-se da presença de N partículas de um gás que estão em um volume V e que estejam em um espaço de seis dimensões dado pela posição da partícula $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e pela velocidade da partícula $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, individualmente. Este espaço de fase recebe o

nome de espaço de fase μ .

A função que oferece o número de partículas que, em t , estão no elemento de volume entre \vec{x} e $\vec{x} + d\vec{x}$ e \vec{v} e $\vec{v} + d\vec{v}$ é uma função distribuição $f = f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ dada por

$$f(\vec{x}, \vec{v}, t)d\vec{x}d\vec{v} = f(\vec{x}, \vec{v}, t)dx_1dx_2dx_3dv_1dv_2dv_3 = f(\vec{x}, \vec{v}, t)d\mu \quad (3.15)$$

onde $d\mu$ é o elemento de volume do espaço de fase μ .

O número $N(t)$ de partículas que, em um instante t , estão presentes no elemento de volume $d\mu$ é

$$N(t) = f(\vec{x}, \vec{v}, t)d\mu(t) \quad (3.16)$$

e em $t + dt$ é

$$N(t + dt) = f(\vec{x}, \vec{v}, t)d\mu(t + dt) \quad (3.17)$$

Se não houverem colisões, então $N(t) = N(t + dt)$. Contudo, se houverem colisões, então

$$\Delta N = N(t + dt) - N(t) = f(\vec{x} + \Delta\vec{x}, \vec{v} + \Delta\vec{v}, t + \Delta t)d\mu(t + \Delta t) - f(\vec{x}, \vec{v}, t)d\mu(t) \quad (3.18)$$

Se as partículas do sistema estiverem sujeitas a uma força externa por unidade de massa $F(\vec{x}, \vec{v}, t)$, a relação entre $d\mu(t + \Delta t)$ e $d\mu(t)$ será dada pelo Jacobiano de transformação de acordo com

$$d\mu(t + \Delta t) = |J|d\mu(t) \quad (3.19)$$

onde

$$J = \frac{\partial[x_1(t + \Delta t), x_2(t + \Delta t), x_3(t + \Delta t), v_1(t + \Delta t), v_2(t + \Delta t), v_3(t + \Delta t)]}{\partial[x_1(t), x_2(t), x_3(t), v_1(t), v_2(t), v_3(t)]} \quad (3.20)$$

em que $x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + v_i\Delta t$ e $v_i(t + \Delta t) = v_i(t) + F_i\Delta t$, onde $i = 1, 2, 3$.

De onde emerge o determinante do Jacobiano $|J|$ como sendo

$$|J| = 1 + \frac{dF_1\Delta t}{dv_1} + \frac{dF_2\Delta t}{dv_2} + \frac{dF_3\Delta t}{dv_3} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \approx 1 + \frac{dF_1\Delta t}{dv_1} + \frac{dF_2\Delta t}{dv_2} + \frac{dF_3\Delta t}{dv_3} \quad (3.21)$$

portanto

$$d\mu(t + \Delta t) \approx \left(1 + \frac{dF_1\Delta t}{dv_1} + \frac{dF_2\Delta t}{dv_2} + \frac{dF_3\Delta t}{dv_3}\right) d\mu(t) \quad (3.22)$$

Expandindo $f(\vec{x} + \Delta\vec{x}, \vec{v} + \Delta\vec{v}, t + \Delta t)$ em Taylor em torno de (\vec{x}, \vec{v}, t) , tem-se que

$$f(\vec{x} + \Delta\vec{x}, \vec{v} + \Delta\vec{v}, t + \Delta t) \approx f(\vec{x}, \vec{v}, t) + \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial v_i}\Delta v_i + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t \quad (3.23)$$

e sabendo que $\Delta x_i/\Delta t = v_i$ e $\Delta v_i/\Delta t = F_i$, a equação (3.18) se torna

$$\Delta N \approx \left(f \frac{\partial F_i}{\partial v_i} \Delta t + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta t + F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \right) d\mu(t) \quad (3.24)$$

e dividindo ΔN por Δt , tem-se que

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx \left(v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) d\mu(t) \quad (3.25)$$

Levantando quatro hipóteses sobre as colisões:

- Para um gás rarefeito, somente as colisões binárias serão consideradas, sendo as probabilidades das demais colisões muito pequenas;
- As forças externas podem ser desprezadas, sendo a força de interação entre as partículas muito maior que as forças externas;
- Não há correlação entre as velocidades das partículas
- A função distribuição varia muito pouco durante as colisões, tornando esta perturbação insignificante perante o sistema.

Considera-se agora duas partículas com velocidades \vec{v} e \vec{v}_1 antes da colisão e \vec{v}' e \vec{v}'_1 após a colisão, conforme as Figuras (3.3), (3.4) e (3.5)

onde a colisão direta é

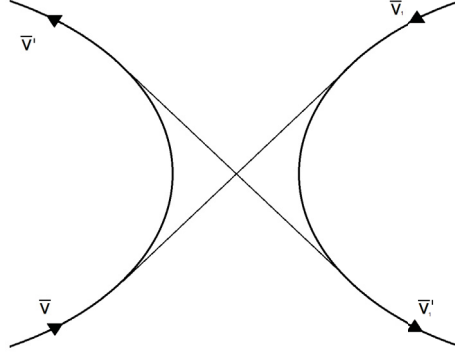


Figura 3.4: Representação da colisão direta. Nesta colisão, a partícula que irá interagir com a partícula presente em O possui uma velocidade \vec{g} antes da colisão e uma velocidade \vec{g}' após a colisão.

e a colisão de restituição é

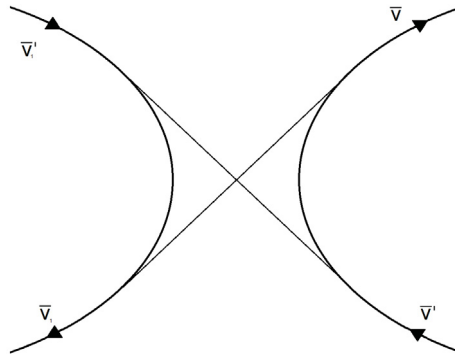


Figura 3.5: Representação da colisão de restituição. Nesta colisão, a partícula que irá interagir com a partícula presente em O possui uma velocidade \vec{g}' antes da colisão e uma velocidade \vec{g} após a colisão.

em que a partícula com velocidade \vec{v} está em \mathcal{O} enquanto a outra partícula se aproxima com velocidade $\vec{g} = \vec{v}_1 - \vec{v}$, onde o volume do cilindro de colisão é $bdbd\phi g\Delta t$.

Em Δt , todas as partículas com velocidades entre \vec{v}_1 e $\vec{v}_1 + d\vec{v}_1$ no cilindro de colisão irão colidir com as partículas com velocidades entre \vec{v} e $\vec{v} + d\vec{v}$ em $d\vec{x}$ ao redor de \mathcal{O} . O número

de partículas com velocidades entre \vec{v}_1 e $\vec{v}_1 + d\vec{v}_1$ no cilindro de colisão é

$$f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v}_1 g \Delta t b d b d \phi \quad (3.26)$$

e o número de partículas com velocidades entre \vec{v} e $\vec{v} + d\vec{v}$ no entorno de \mathcal{O} é

$$f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v} d\vec{x} \quad (3.27)$$

Assim o número de partículas saindo com velocidade \vec{v} de $d\mu(t)$ em um intervalo de tempo Δt é

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t} \right)^- = \int f(\vec{x}, \vec{v}_1, t) f(\vec{x}, \vec{v}, t) g b d b d \phi d\vec{v}_1 d\mu(t) \quad (3.28)$$

Já o número total de colisões que ocorrem em $d\vec{x}$ durante o intervalo de tempo Δt é

$$f(\vec{x}, \vec{v}_1, t) b d b d \phi' g' \Delta t d\vec{v}_1' f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{x} d\vec{v}' \quad (3.29)$$

Pela conservação da energia, $|\vec{g}| = |\vec{g}'|$, considerando ϕ como uma translação, $d\phi = d\phi'$ e sendo o Jacobiano de transformação de velocidades unitário, então $d\vec{v}_1' d\vec{v}' = d\vec{v}_1 d\vec{v}$, portanto a equação (3.29) se torna

$$f(\vec{x}, \vec{v}_1, t) b d b d \phi g \Delta t d\vec{v}_1 f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{x} d\vec{v}. \quad (3.30)$$

A entrada (ou criação) de pontos em Δt em $d\mu$ com velocidades entre \vec{v} e $\vec{v} + d\vec{v}$ é

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t} \right)^+ = \int f(\vec{x}, \vec{v}_1', t) f(\vec{x}, \vec{v}', t) g b d b d \phi d\vec{v}_1' d\mu(t) \quad (3.31)$$

Definindo $f = f(\vec{x}, \vec{v}, t)$, $f' = f(\vec{x}, \vec{v}', t)$, $f_1 = f(\vec{x}, \vec{v}_1, t)$ e $f_1' = f(\vec{x}, \vec{v}_1', t)$, tem-se que

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta N}{\Delta t} \right)^+ - \left(\frac{\Delta N}{\Delta t} \right)^- = \int (f_1' f' - f_1 f) g b d b d \phi d\vec{v}_1 d\mu(t) \quad (3.32)$$

portanto a equação (3.25) se resume à

$$v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} + \frac{\partial f}{\partial t} = \int (f_1' f' - f_1 f) g b d b d \phi d\vec{v}_1 \quad (3.33)$$

e, então, para o caso em que $\partial F_i / \partial v_i = 0$, a equação de Boltzmann é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = \int (f_1' f' - f_1 f) g b d b d \phi d\vec{v}_1 \equiv Q(f, f) \quad (3.34)$$

3.5.1 A Equação de Transporte

Multiplicando a equação de Boltzmann por uma função arbitrária $\psi = \psi(\vec{x}, \vec{v}, t)$ e integrando sobre \vec{v} , tem-se uma função dependente da posição, assim

$$\int \psi \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{v} + \int \psi v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d\vec{v} + \int \psi F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} d\vec{v} = \int \psi (f'_1 f' - f_1 f) g b d b d \phi d\vec{v}_1 d\vec{v} \quad (3.35)$$

o primeiro termo do lado esquerdo da equação (3.35) pode ser descrito por

$$\int \psi \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{v} = \int \frac{\partial f \psi}{\partial t} d\vec{v} - \int f \frac{\partial \psi}{\partial t} d\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int \psi f d\vec{v} - \int f \frac{\partial \psi}{\partial t} d\vec{v} \quad (3.36)$$

o segundo termo

$$\int \psi v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d\vec{v} = \int \frac{\partial \psi v_i f}{\partial x_i} d\vec{v} - \int f v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} d\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int \psi v_i f d\vec{v} - \int f v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} d\vec{v} \quad (3.37)$$

e o terceiro termo se dá por

$$\int \psi F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} d\vec{v} = \int \frac{\partial \psi F_i f}{\partial v_i} d\vec{v} - \int f F_i \frac{\partial \psi}{\partial v_i} d\vec{v} \quad (3.38)$$

e, utilizando o teorema da divergência de Gauss na equação (3.38) com \vec{n} sendo a normal unitária e dS o elemento de área de uma superfície localizada em pontos infinitamente afastados no espaço das velocidades, tem-se que

$$\int \psi F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} d\vec{v} = \oint_S \psi F_i f n_i dS - \int F_i f \frac{\partial \psi}{\partial v_i} d\vec{v} = - \int F_i f \frac{\partial \psi}{\partial v_i} d\vec{v} \quad (3.39)$$

onde foi verificado que f decresce rapidamente para grandes valores da velocidade.

Já o lado direito da equação (3.35) pode ser dado por

$$\begin{aligned} \int \psi (f'_1 f' - f_1 f) g b d b d \phi d\vec{v}_1 d\vec{v} &= \int (\psi' - \psi) f_1 f g b d b d \phi d\vec{v}_1 d\vec{v} \\ &= \frac{1}{2} \int (\psi - \psi') (f'_1 f' - f_1 f) g b d b d \phi d\vec{v}_1 d\vec{v} \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde

$$\int \psi f'_1 f' g b d b d \phi d\vec{v}_1 d\vec{v} = \int \psi' f_1 f g b d b d \phi d\vec{v}'_1 d\vec{v}' = \int \psi' f_1 f g b d b d \phi d\vec{v}_1 d\vec{v} \quad (3.41)$$

e trocando \vec{v}' e \vec{v} por \vec{v}'_1 e \vec{v}_1 , então

$$\frac{1}{2} \int (\psi - \psi') (f'_1 f' - f_1 f) g b d b d \phi d\vec{v}_1 d\vec{v} = \frac{1}{2} \int (\psi_1 - \psi'_1) (f'_1 f' - f_1 f) g b d b d \phi d\vec{v}_1 d\vec{v} \quad (3.42)$$

de modo que

$$\int \psi(f'_1 f' - f_1 f) g b d b d \phi d \vec{v}_1 d \vec{v} = \frac{1}{4} \int (\psi_1 + \psi - \psi'_1 - \psi') (f'_1 f' - f_1 f) g b d b d \phi d \vec{v}_1 d \vec{v} \quad (3.43)$$

tornando a equação (3.35)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int \psi f d \vec{v} + \frac{\partial}{\partial x_i} \int \psi v_i f d \vec{v} - \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial \psi}{\partial v_i} \right) f d \vec{v} \\ &= \frac{1}{4} \int (\psi_1 + \psi - \psi'_1 - \psi') (f'_1 f' - f_1 f) g b d b d \phi d \vec{v}_1 d \vec{v} \end{aligned} \quad (3.44)$$

conhecida como a equação de transporte.

Um importante resultado da equação (3.44) é dado através da análise do termo de produção pelas colisões com a nulidade do lado direito da mesma quando

$$\psi_1 + \psi = \psi'_1 + \psi_1 \quad (3.45)$$

onde a função ψ que satisfaz (3.45) é conhecida como invariante de soma e respeita o teorema que segue

Teorema 1: Uma função contínua $\psi(\vec{v})$ é um invariante de soma se e somente se

$$\psi(\vec{v}) = A + \vec{B} \cdot \vec{v} + D v^2 \quad (3.46)$$

onde A e D são funções escalares e \vec{B} é uma função vetorial, sendo que todas não dependem de \vec{v} .

Em suma, este invariante de soma indica as quantidades conservadas que estão descritas no próximo sub-item.

3.5.2 Equações de Balanço

Sendo a integral dos produtos $f m d \vec{v}$ a densidade (ρ) em que m é a massa da partícula, $m v_i f d \vec{v}$ a densidade do momento linear (ρu_i) e $m v^2 f d \vec{v} / 2$ a densidade de energia total (ρu), tem-se que

$$\rho(\vec{x}, t) = \int m f(\vec{x}, \vec{v}, t) d \vec{v} \quad (3.47)$$

$$\rho u_i(\vec{x}, t) = \int m f(\vec{x}, \vec{v}, t) v_i d \vec{v} \quad (3.48)$$

$$\rho u(\vec{x}, t) = \int \frac{mv^2}{2} f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (3.49)$$

em que se pode substituir a velocidade da partícula em relação ao gás (v_i) pela velocidade peculiar $V_i = v_i - u_i$, onde u_i é a velocidade do gás. Desta forma, ρu pode ser dado por

$$\rho u(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \int mV^2 f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v} + \rho u^2 \quad (3.50)$$

onde ρu^2 é a densidade de energia cinética e o primeiro termo do lado direito da equação (3.43) é a densidade de energia interna ($\rho\varepsilon$).

O momento da função distribuição de ordem N é

$$p_{i_1, i_2, \dots, i_N}(\vec{x}, t) = \int mV_{i_1} V_{i_2} \dots V_{i_N} f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (3.51)$$

O momento de segunda ordem é o tensor pressão (p_{ij})

$$p_{ij}(\vec{x}, t) = \int mV_i V_j f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (3.52)$$

onde o tensor tensão é igual ao tensor pressão em módulo ($p_{ij} = -T_{ij}$).

A pressão (p) é então dada por

$$p(\vec{x}, t) = \frac{1}{3} \int mV^2 f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v} = \frac{p_{ii}}{3} = \frac{2}{3} \rho\varepsilon \quad (3.53)$$

Tendo ainda que a relação entre a pressão, a temperatura absoluta (T) e a densidade é

$$T(\vec{x}, t) = \frac{m}{k} \frac{p}{\rho} = \frac{m}{3\rho k} \int mV^2 f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v} = \frac{2m\varepsilon}{3k} \quad (3.54)$$

3.5.3 A função distribuição de Maxwell

Tomando a equação de Boltzmann no equilíbrio (o número de partículas que entra e deixa o espaço de fase μ é nulo), ou seja, o lado direito da equação (3.34) é

$$\int (f'_1 f' - f_1 f) g b d b d \phi d \vec{v}_1 = 0 \quad (3.55)$$

de modo que $f'_1 f' = f_1 f$, tomando seu logaritmo $\ln f'_1 + \ln f' = \ln f_1 + \ln f$ e comparando com a equação (3.45), nota-se que f é um invariante de soma e pode ser representado por

$$\ln f = A + \vec{B} \cdot \vec{v} + Dv^2 \quad (3.56)$$

Definindo $A = \ln a - bu^2$, $\vec{B} = 2b\vec{u}$ e $D = -b$ com a e b sendo funções escalares positivas e \vec{u} uma função vetorial, então f assume a forma

$$f = ae^{-b(\vec{v}-\vec{u})^2} \quad (3.57)$$

A equação (3.57) pode ser substituída em (3.47, 3.48 e 3.54), resultando na função distribuição de velocidades de Maxwell (f_M)

$$f = f_M = \frac{\rho}{m} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT} \vec{V}^2} \quad (3.58)$$

onde $\vec{V} = \vec{v} - \vec{u}$.

3.5.4 O Modelo BGK

Um dos maiores problemas na solução da equação de Boltzmann é, para sistemas com colisões, o termo de colisão $Q(f, f)$ que nada mais é que o lado direito da equação (3.34), ou seja

$$Q(f, f) = \int (f'_1 f' - f_1 f) g b d b d \phi d \vec{v}_1 \quad (3.59)$$

Para todos os invariantes de soma ($\psi = m, mv_i, mv^2/2$), tem-se que

$$\int \psi Q(f, f) d\vec{v} = 0 \quad (3.60)$$

e, em adição, o teorema H deve ser satisfeito [61]

$$\int \ln f Q(f, f) d\vec{v} \leq 0 \quad (3.61)$$

Procurando simplificar o termo de colisão, o modelo BGK desenvolvido por Bhatnagar, Gross e Krook foi formulado [62]. Neste modelo, o termo de colisão $Q(f, f)$ é substituído por um outro termo de colisão aproximado $J(f)$ que obedece às mesmas condições de $Q(f, f)$, ou seja, obedece as equações (3.59)-(3.61) da mesma forma que $Q(f, f)$.

O modelo BGK passa a descrever a equação de Boltzmann como sendo

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = \nu(f_M - f) \quad (3.62)$$

onde ν é da ordem de grandeza da frequência de colisão e f_M é a Maxwelliana local dada pela equação (3.58).

Para que o valor da viscosidade do sistema, nesta modelagem, esteja correto, pode-se escolher ν a partir do método de Chapman-Enskog, onde

$$\nu(\vec{x}, t) = \frac{p(\vec{x}, t)}{\mu(T)} \quad (3.63)$$

onde $\mu(T)$ é a viscosidade em função da temperatura, em que ν será uma quantidade local vez que o divisor e o dividendo são funções de \vec{x} e t .

O número de Prandtl é um parâmetro importante e é descrito pela razão entre a taxa de difusão viscosa e a taxa de difusão térmica, ou seja,

$$Pr = \frac{\nu/\rho}{\kappa/(c_p\rho)} = \frac{c_p\mu}{\kappa} \quad (3.64)$$

onde ρ é a densidade, μ a viscosidade, κ condutividade térmica e c_p o calor específico.

Para um gás monoatômico, $c_p = 5k/(2m)$ e, substituindo $\kappa = 5k\mu/(2m)$, o modelo BGK possui $Pr = 1$. Entretanto, utilizando o valor correto do ponto de vista experimental é de $\kappa = 15k\mu/(4m)$, tem-se que $Pr = 2/3$ (valor correto do número de Prandtl do ponto de vista experimental).

Contudo, para encontrar a condutividade térmica (κ) correta no modelo BGK, a frequência de colisão deve ser dada por

$$\nu(\vec{x}, t) = \frac{5kp(\vec{x}, t)}{2m\kappa} = \frac{2p(\vec{x}, t)}{3\mu(T)} \quad (3.65)$$

onde $\kappa = 15k\mu/(4m)$.

Desta maneira, o modelo BGK é incapaz de descrever corretamente κ e μ simultaneamente. Em outras palavras, o modelo BGK não oferece o número de Prandtl correto [61] uma vez que a razão entre a viscosidade e a condutividade térmica é $5k/(2m)$.

3.6 Instabilidade de Jeans para um Componente não Colisional na Teoria Newtoniana em uma Cosmologia tipo EdS a partir da Equação de Boltzmann

Kremer [60] partiu das equações não colisionais de Boltzmann e de Poisson para encontrar a Instabilidade de Jeans para um sistema de um componente em um universo estático, para um sistema de dois componentes em um universo estático, conforme descrito no item 3.1, e para um sistema composto de um componente em um universo em expansão. Para este último caso, considerou um universo em expansão onde um fluido sem pressão é a fonte do campo gravitacional e sua função distribuição de velocidades no equilíbrio em coordenadas comóveis, segundo a Lei de Hubble ($\dot{\vec{r}} = H\vec{r}$), é

$$f_0(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{\rho}{m} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\vec{v} - \frac{\dot{a}}{a}\vec{r})^2}{2\sigma^2} \right], \quad (3.66)$$

em que σ é a velocidade térmica de dispersão da partícula e $f_0(\vec{r}, \vec{v}, t)$ satisfaz as equações de Boltzmann e de Poisson.

Utilizando a equação (2.44) do capítulo 2 (assim como no item 3.4)

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3, \quad (3.67)$$

e tendo o potencial gravitacional (derivado a partir da equação de Poisson em coordenadas esféricas) é dado por

$$\Phi_0(\vec{r}, t) = \frac{2\pi}{3} G \rho r^2 \quad (3.68)$$

a equação de Poisson e a equação de Boltzmann são respeitadas pela função distribuição de velocidades do equilíbrio, sendo elas descritas pelas equações (3.69) e (3.70), respectivamente

$$\nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \int m f_0 d^3v = 4\pi G \rho \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_0 - \nabla \Phi_0 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (3.70)$$

Submetendo a função distribuição de velocidades e o potencial gravitacional a pequenas perturbações $f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f_0(\vec{r}, \vec{v}, t)[1 + h(\vec{r}, \vec{v}, t)]$ e $\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_0(\vec{r}, t) + \Phi_1(\vec{r}, t)$, as novas

equações (3.69) e (3.70) são

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \int m f_0 h d^3 v \quad (3.71)$$

$$f_0 \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla h - \nabla \Phi_0 \cdot \frac{\partial h}{\partial \vec{v}} \right] - \nabla \Phi_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (3.72)$$

onde

$$h(\vec{r}, \vec{v}, t) = h_1(\vec{r}, \vec{v}, t) \exp \left(i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}}{a} \right) \quad (3.73)$$

$$\Phi_1(\vec{r}, t) = \phi(t) \exp \left(i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}}{a} \right) \quad (3.74)$$

em que $\phi(t)$ é uma amplitude, o fator \vec{q}/a se deve ao estiramento do comprimento de onda em um universo em expansão e $h_1(\vec{r}, \vec{v}, t)$ é uma combinação linear dos invariantes de colisão da equação de Boltzmann dado por

$$h_1(\vec{r}, \vec{v}, t) = A(t) + B(t) \cdot \left(\vec{v} - \frac{\dot{a}\vec{r}}{a} \right) + D(t) \left(\vec{v} - \frac{\dot{a}\vec{r}}{a} \right)^2 \quad (3.75)$$

Inserindo a equação (3.75) na equação (3.73), as equações (3.73) e (3.74) em (3.71) e em (3.72), multiplicando a equação de Boltzmann por suas invariantes de colisão e integrando-as em $d\vec{v}$, definindo $B = B(\vec{t}) \cdot \vec{q}$, $A = A(t)$, $D = D(t)$ e $\phi = \phi(t)$ tem-se que

$$\begin{cases} \dot{A} + 3\sigma^2 \dot{D} + i \frac{\sigma^2}{a} B - 6 \frac{\dot{a}}{a} \sigma^2 D = 0 \\ \dot{B} + i \frac{q^2}{a} \left[A + 5\sigma^2 D + \frac{\phi}{\sigma^2} \right] - \frac{\dot{a}}{a} B = 0 \\ 3\dot{A} + 15\sigma^2 \dot{D} + 5i \frac{\sigma^2}{a} B - 30 \frac{\dot{a}}{a} \sigma^2 D = 0 \\ \frac{q^2}{a^2} \phi(t) + 4\pi G [A + 3\sigma^2 D] \rho = 0 \end{cases} \quad (3.76)$$

de onde é possível verificar que a primeira e a terceira equações indicam que $\dot{A} = 0$, já que são linearmente dependentes e multiplicando a primeira equação por 5, tem-se que $5\dot{A} = 3\dot{A}$. Consequentemente, A é uma constante que pode ser definida como $A = 1$ e as novas equações do sistema são

$$3\sigma^2 \dot{D} + i \frac{\sigma^2}{a} B - 6 \frac{\dot{a}}{a} \sigma^2 D = 0 \quad (3.77)$$

$$\dot{B} + i \frac{q^2}{a} \left[1 + 5\sigma^2 D + \frac{\phi}{\sigma^2} \right] - \frac{\dot{a}}{a} B = 0 \quad (3.78)$$

$$\frac{q^2}{a^2} \phi + 4\pi G [1 + 3\sigma^2 D] \rho = 0 \quad (3.79)$$

Isolando B de (3.77), encontrando \dot{B} , isolando ϕ de (3.79), inserindo estas quantidades em (3.78) e multiplicando o resultado por $\sigma^2/(ai)$, obtém-se

$$3\sigma^2\ddot{D} - \frac{6\dot{a}\sigma^2}{a}\dot{D} - \frac{6\ddot{a}\sigma^2}{a}D + \frac{q^2\sigma^2}{3a^2}(1 + 5\sigma^2D) - 4\pi G(1 + 3\sigma^2D)\rho + \frac{6\dot{a}^2\sigma_b^2D_b}{a^2} = 0 \quad (3.80)$$

definindo o contraste de densidade como $\delta = \rho/\bar{\rho} = 1 + 3\sigma^2D$, então

$$\dot{\delta} = 3\sigma^2\dot{D} - \frac{6\dot{a}\sigma^2}{a}D \quad (3.81)$$

e

$$\ddot{\delta} = 3\sigma^2\ddot{D} - \frac{12\dot{a}\sigma^2}{a}\dot{D} + \frac{18\dot{a}^2\sigma^2}{a^2}D - \frac{6\ddot{a}\sigma^2}{a}\dot{D} \quad (3.82)$$

portanto (3.80) se torna

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + \frac{q^2\sigma^2}{3a^2}(5\delta - 2) - 4\pi G\rho\delta = 0 \quad (3.83)$$

e definindo o comprimento de onda da onda incidente como $\lambda_0 = 2\pi a_0/q$, o comprimento de onda de Jeans como $\lambda_J^0 = 10\pi\sigma_0/(3\sqrt{4\pi G\rho_0})$, o tempo adimensional como $\tau = t\sqrt{6\pi G\rho_0}$, sua derivada como $(d/(d\tau)) = '$, o fator de escala como $a = a_0(6\pi G\rho_0 t^2)^{1/3}$, $\xi = \lambda_J^0/\lambda_0$ e multiplicando por τ^2 , tem-se

$$\tau^2\delta'' + \frac{4\tau}{3}\delta' + \frac{2\delta}{3}\left(\frac{3\xi^2}{5\tau^{2/3}} - 1\right) - \frac{4\xi^2}{25\tau^{2/3}} = 0 \quad (3.84)$$

onde foi assumido que $\sigma \propto 1/a$.

A análise desta equação pode ser observada na Figura 3.6.

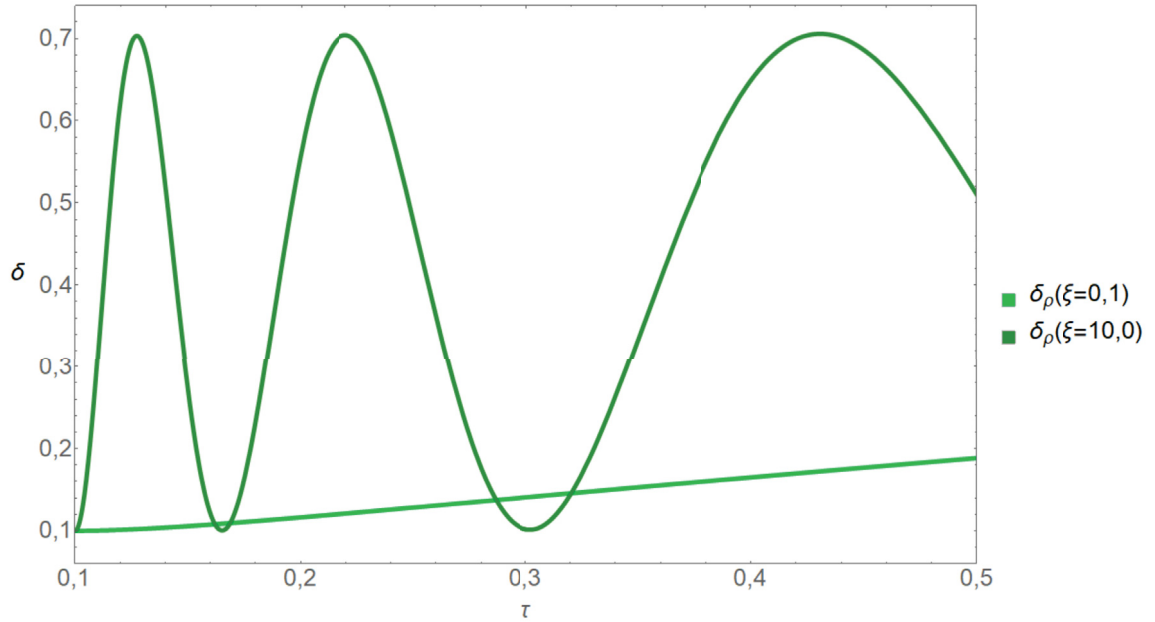


Figura 3.6: Análise da evolução do δ em função do tempo de acordo com os valores 0,1 e 10,0 da variável ξ para o modelo de Kremer [60].

Sendo compatível a descrição realizada neste item com o item 3.4, espera-se solucionar o empecilho da razão das velocidades de dispersão encontrado por Kremer. Para tanto, é necessário esclarecer o formalismo não linear, mais especificamente, o modelo do colapso esférico tipo *Top-Hat*.

3.7 Formalismo não Linear: O Colapso Esférico tipo *Top-Hat* e a Virialização

Quando as perturbações crescem, o formalismo linear (Teoria de Jeans) deixa de ser válido e o formalismo não linear toma seu lugar. O formalismo não linear mais tratado na literatura é o modelo do colapso esférico tipo *Top-Hat* devido à sua simplicidade e os resultados importantes que dele surgem [48, 57].

Parte-se do princípio de um universo homogêneo, contendo apenas uma região esférica perturbada, dominado pela matéria após a recombinação, contendo um fluido não colisional

e presente em uma cosmologia Einstein-de-Sitter.

Considerando-se uma região esférica de raio r e massa M , a evolução deste raio é dada pelo teorema de Birkhoff

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} = -\frac{4\pi G}{3}\rho(1 + \bar{\delta})r \quad (3.85)$$

onde ρ é a densidade e $\bar{\delta}$ é a sobredensidade do sistema, enquanto isto, o universo EdS se expande conforme

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho a \quad (3.86)$$

assim como descrito na equação (2.41) para o caso de $p = 0$.

Integrando a equação (3.86) em relação ao tempo, dá-se a primeira integral do movimento

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{r} \quad (3.87)$$

onde E é a energia total da perturbação (conservação de energia).

Caso $E < 0$, a esfera se distende e, eventualmente, atinge um raio máximo (r_{max}) em um tempo t_{max} e depois tende ao colapso em $t = 2t_{max}$ e $r \rightarrow 0$. Tal evento pode ser descrito por $r = r_{max}(1 - \cos\theta)/2$ e $t = t_{max}(\theta - \sin\theta)/\pi$ com θ entre 0 e 2π para ambos os casos.

No caso linear, expandindo as duas equações supra citadas (de r e t) para pequenos valores de θ , tem-se que

$$r \approx \frac{r_{max}}{4} \left(\frac{6\pi t}{t_{max}} \right)^{2/3} \quad (3.88)$$

No ponto máximo (r_{max}), a esfera está em repouso e, portanto, $E = -GM/r_{max}$. Desta maneira, é possível descrever t_{max} como sendo

$$t_{max} = \int_0^{r_{max}} \frac{dr}{\{2[(-GM/r_{max}) + GM/r]\}^{1/2}} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2r_{max}^3}{GM}} \quad (3.89)$$

ou seja,

$$\left(\frac{t_{max}}{\pi} \right)^2 = \frac{\left(\frac{r_{max}}{2} \right)^3}{GM} \quad (3.90)$$

a equação (3.82) foi descrita desta forma pois t_{max}/π e $r_{max}/2$ são comumente descritos na literatura como sendo B e A , respectivamente, e ambos se relacionam de acordo com $A^3 = GMB^2$.

Sendo que a densidade (ρ) do sistema é dada por $\rho = 3M/4\pi r^3$ e a densidade do universo

EdS por $\bar{\rho} = 1/6\pi Gt^2$, a relação $\rho/\bar{\rho}$ é

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} \equiv 1 + \bar{\delta} = \frac{9(\theta - \sin\theta)^2}{2(1 - \cos\theta)^3} \quad (3.91)$$

e, utilizando a série de Taylor nesta equação para $\theta \rightarrow 0$, tem-se que a extrapolação para o contraste de densidade do regime linear ($\bar{\delta}_L$)

$$\bar{\delta}_L \approx \left(1 - \frac{2\theta^2}{20}\right) \left(1 - \frac{3\theta^2}{12}\right) - 1 = \frac{3\theta^2}{20} = \frac{3}{20} \left(\frac{12\pi t}{t_{max}}\right)^{2/3} \quad (3.92)$$

Desta forma, para $\theta = \pi$ ($t = t_{max}$), o modelo do colapso esférico indica, a partir da equação (3.83), que $1 + \bar{\delta} \approx 5,55$ e a extrapolação do modelo linear infere, a partir da equação (3.84), que $\bar{\delta}_L \approx 1,68$.

Além disto, pode-se ainda descrever o teorema virial a partir da energia cinética virial (K_{vir}) e a energia potencial virial (U_{vir}) no equilíbrio virial. Neste caso, as energias se comportam de maneira que $2K_{vir} + U_{vir} = 0$ e, da conservação da energia, tem-se que $E_{vir} = K_{vir} + U_{vir} = E_{max}$, onde $E_{max} = U_{max} = -\frac{GM}{r_{max}}$ e $E_{vir} = \frac{U_{vir}}{2} = -\frac{GM}{2r_{vir}}$ onde r_{vir} é o raio no equilíbrio virial, tendo seu valor definido por $r_{vir} = r_{max}/2$ e sabendo que esta virialização ocorre em $t = 2t_{max}$.

Assim, a densidade média do meio virializado é 32 vezes maior que a densidade do meio em $t = t_{max}$ já que $\rho/\bar{\rho} \propto t^2/r^3$ e definindo o contraste de densidade da virialização como $1 + \delta_{vir}$, então

$$1 + \delta_{vir} = 32(1 + \bar{\delta}) = 18\pi^2 \approx 178 \quad (3.93)$$

onde é comumente utilizada uma sobredensidade de 200 e daí convém utilizar os termos r_{200} e M_{200} .

Sendo possível verificar que, no momento da virialização (a_{vir}), a teoria linear (tal como a instabilidade de Jeans) indica que a densidade é 2,686 vezes maior que a densidade do fundo (*background density*) e, por intermédio da teoria não linear (modelo de colapso esférico), determina-se que a densidade de virialização é aproximadamente 178 vezes maior que a densidade de fundo, conforme ilustra a figura 3.7.

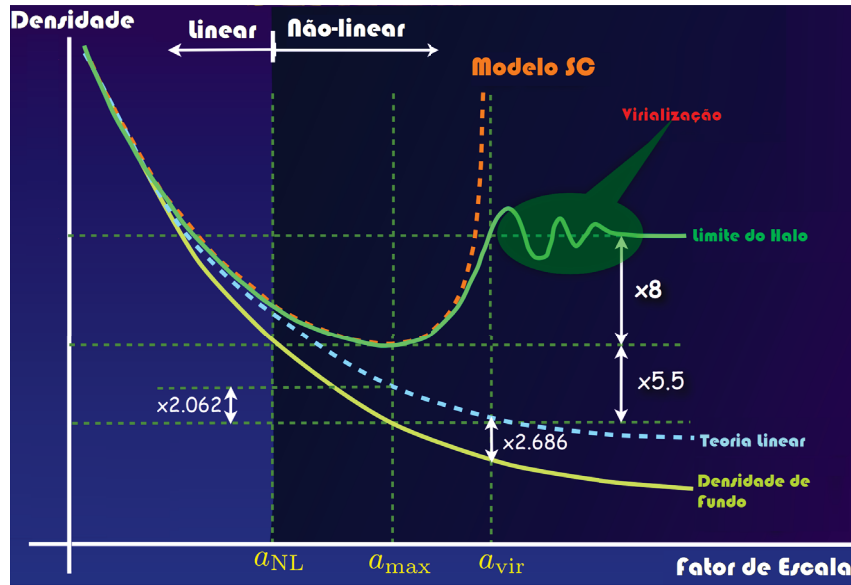


Figura 3.7: Modelos linear (Teoria Linear) e não linear (Modelo de colapso esférico ou Spherical Collapse Model (SC)) seguidos pela virialização. A figura indica que a diferença entre o modelo linear e o modelo do colapso esférico, no momento da virialização (a_{vir}), é aproximadamente de duas ordens de grandeza. Adaptado do material de aula do Professor Frank Van Den Bosch da Universidade de Yale, 2018.

Também se pode observar a progressão deste cenário, de forma mais sucinta, através da evolução do raio da esfera que representa o sistema, conforme segue

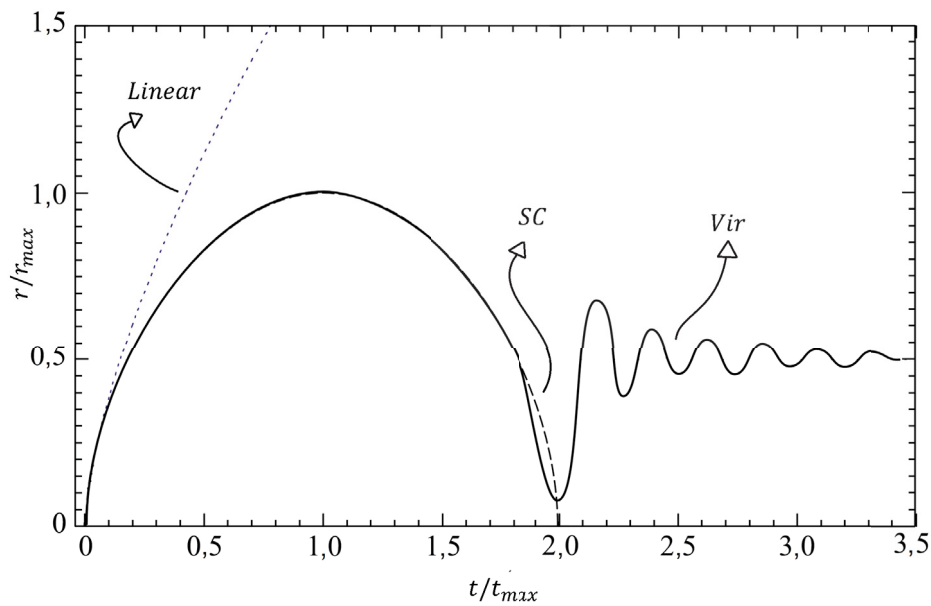


Figura 3.8: Modelo linear (Linear), modelo de colapso esférico ou Spherical Collapse Model (SC), seguidos pela virialização (Vir). A linha pontilhada indica a evolução do modelo linear, a linha tracejada representa a propagação do raio no modelo do colapso esférico tipo Top-Hat e a última parte separada em $t = 2t_{max}$ indica a evolução do sistema no período da virialização. O traço contínuo representa a real evolução do sistema. Adaptado do material de aula do Professor Laerte Sodré Júnior da Universidade de São Paulo, 2018.

3.8 Velocidades de Dispersão

Interpretações para o modelo do colapso esférico definem o raio virial como sendo o ponto no qual uma porção do sistema virializa, ou seja, quando o contraste de densidade total do sistema atinge aproximadamente 200 vezes a densidade crítica do universo no aglomerado de galáxias e então define-se o raio r_{200} e a massa M_{200} , normalmente nomeados "raios virial" e "massa virial".

Sabendo que a ME é incapaz de dispersar sua energia potencial gravitacional, esta possui a velocidade que a mantém ao redor de um centro e, eventualmente, equiparte sua energia com o resto da matéria (escura) por fricção dinâmica, resultando em um halo virializado sustentado pela pressão e pela pouca rotação.

Modelos analíticos [63] e simulações [64] descrevem que a massa "virializa" geralmente em um meio em que a densidade é 200 vezes a densidade crítica de massa (ρ_c) no redshift instantâneo. Contudo, outros autores também utilizam M_{500} e M_{1000} . Para galáxias, os valores de M_{200} oscilam entre 3×10^{11} e $3 \times 10^{15} M_\odot$ e os valores de r_{200} oscilam entre $177kpc$ e $3740kpc$ ($1kpc \approx 3262 \text{ anos} - luz$) [65].

A velocidade de dispersão dos componentes das galáxias é um fator obtido indiretamente que proporciona informações adicionais acerca da ME. Quando mensurada, em galáxias anãs, é indubitável a existência da ME e, em satélites de galáxias espirais, a velocidade de dispersão sugere a formação de halos de ME ao redor destas galáxias [18].

Sendo que a existência da ME foi descoberta em *clusters* (aglomerados) de galáxias com velocidades de dispersão de seus componentes (σ) superiores às esperadas pela atração gravitacional das massas estelares das galáxias visíveis [66, 67], esta quantidade é essencial para compreender a ME e a velocidade de dispersão da ME (σ_d), que pode ser definida como

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{GM_{200}}{2r_{200}}} \quad (3.94)$$

onde G é a constante gravitacional [68].

Considerando a existência da ME e seu grande impacto sobre a geração das primeiras galáxias a partir de halos de ME que envolvem e permeiam a MB, é necessário verificar o comportamento das galáxias e dos aglomerados onde estas galáxias tomam forma. As temperaturas para meios dentro de aglomerados de galáxias (intraclusters), são da ordem de $10^7 K$ a $10^8 K$ e se estendem por até poucos Mpc.

Ettori et al. [69] descrevem os perfis de massa de 44 clusters de galáxias luminosas através do raio-X utilizando métodos de forma funcional propostos por Navarro, Frenk e White [70] dos dados obtidos por intermédio da sonda de multi-espelhos de raios-X lançada em 1999 pela ESA (Agência Espacial Europeia) denominada de XMM-Newton.

O método de forma funcional propostos por Navarro, Frenk e White [70] é feito por intermédio de simulações de N-corpos de sistemas presentes em universo plano com o código desenvolvido por Efstathiou et al. [71].

Leccardi e Molendi [72] descrevem a temperatura radial de aglomerados de galáxias luminosas a partir dos dados obtidos com XMM-Newton entre os redshifts 0,09 e 0,30, dos quais

uma parcela concomitante entre os dois trabalhos está presente na tabela 3.2.

Identificação	z	$r_{200}(kpc)$	$M_{200}(10^{14}M_{\odot})$	$T(10^7 K)$
RXCJ0003.8+0203	0,0924	1231 ± 65	$1,90 \pm 0,23$	4,29
Abell 3911	0,0965	1589 ± 88	$3,88 \pm 0,50$	6,26
Abell 3827	0,0984	1894 ± 84	$6,61 \pm 0,73$	8,24
RXCJ0049.4-2931	0,1080	980 ± 59	$0,94 \pm 0,16$	3,83
Abell 2034	0,1130	2491 ± 140	$17,64 \pm 2,17$	8,12
RXCJ1516.5-0056	0,1150	1668 ± 65	$4,73 \pm 0,42$	4,41
RXCJ2149.1-3041	0,1179	1298 ± 52	$2,21 \pm 0,21$	3,83
RXC1516.3+0005	0,1183	1416 ± 95	$2,84 \pm 0,41$	6,15
RXCJ1141.4-1216	0,1195	1635 ± 55	$4,88 \pm 0,37$	4,41
RXCJ1044.5-0704	0,1323	1399 ± 35	$2,86 \pm 0,18$	4,52
Abell 1068	0,1375	1772 ± 57	$6,40 \pm 0,48$	5,22
RXCJ2218.6-3853	0,1379	1991 ± 159	$8,76 \pm 1,62$	7,42
RXCJ0605.8-3518	0,1410	1613 ± 64	$4,51 \pm 0,36$	5,68
RXCJ0020.7-2542	0,1424	2023 ± 228	$10,03 \pm 2,67$	6,61
Abell 1413	0,1427	1837 ± 64	$6,12 \pm 0,32$	7,77
RXCJ2048.1-1750	0,1470	1729 ± 155	$5,96 \pm 1,12$	6,50
RXCJ0547.6-3152	0,1483	1921 ± 161	$7,89 \pm 1,51$	7,77
Abell 2204	0,1522	2450 ± 79	$15,93 \pm 1,19$	9,86
RXCJ0958.3-1103	0,1527	2183 ± 174	$11,94 \pm 2,02$	7,08
RXCJ2234.5-3744	0,1529	2237 ± 293	$13,42 \pm 4,15$	9,98
RXCJ2014.8-2430	0,1612	1935 ± 56	$7,56 \pm 0,53$	8,24
RXCJ0645.4-5413	0,1670	1919 ± 133	$7,08 \pm 1,12$	9,86
Abell 1689	0,1832	1892 ± 40	$7,36 \pm 0,44$	10,67
Abell 383	0,1871	1577 ± 79	$4,43 \pm 0,37$	5,10
Abell 209	0,2060	2006 ± 125	$8,60 \pm 1,23$	7,66
Abell 963	0,2060	1750 ± 95	$6,17 \pm 0,83$	7,54
Abell 773	0,2170	2100 ± 257	$10,94 \pm 3,12$	8,70

Identificação	z	$r_{200}(kpc)$	$M_{200}(10^{14}M_{\odot})$	$T(10^7K)$
Abell 1763	0,2230	1644 ± 105	$4,25 \pm 0,74$	8,35
Abell 2390	0,2280	2735 ± 63	$24,71 \pm 1,16$	12,99
Abell 2667	0,2300	2374 ± 36	$15,88 \pm 0,45$	8,93
RX J2129.6+0005	0,2350	1711 ± 60	$5,40 \pm 0,44$	6,38
Abell 1835	0,2532	2433 ± 86	$17,53 \pm 1,41$	9,98
RXCJ0307.0-2840	0,2534	2030 ± 199	$10,44 \pm 2,39$	7,89
Abell 68	0,2550	2293 ± 127	$15,96 \pm 1,97$	8,35
E1455+2232	0,2578	1484 ± 46	$3,66 \pm 0,29$	5,80
RXCJ2337.6+0016	0,2730	1779 ± 192	$6,81 \pm 1,91$	8,35
RXCJ0303.8-7752	0,2742	2191 ± 179	$13,21 \pm 2,33$	8,70
RXCJ0532.9-3701	0,2747	1784 ± 179	$6,88 \pm 1,83$	8,70
RXCJ0232.2-4420	0,2836	2230 ± 141	$14,28 \pm 1,90$	8,35
ZW 3146	0,2910	1875 ± 49	$7,79 \pm 0,49$	8,12
RXCJ0043.4-2037	0,2924	1604 ± 157	$4,70 \pm 1,24$	7,89
RXCJ0516.7-5430	0,2952	2029 ± 246	$10,44 \pm 2,88$	8,70
RXCJ1131.9-1955	0,3072	2121 ± 206	$11,31 \pm 2,50$	9,40

Tabela 3.2: Lista dos parâmetros obtidos dos trabalhos de Ettori et al. [69] e Leccardi & Molendi [72]. O redshift (z) e temperatura (T) foram obtidos de Leccardi & Molendi e r_{200} e M_{200} do método 1 presente no trabalho de Ettori et al.

Supondo que a determinação da velocidade de dispersão da ME possa ser realizada pela equação (3.94) e a velocidade de dispersão da MB possa ser descrita como

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{kT}{2m_p}} \quad (3.95)$$

onde k é a constante de Boltzmann e T a temperatura dos elétrons livres. O fator dois se deve ao peso molecular médio do gás primordial em unidades atômicas e m_p é a massa do próton [73].

Com a razão σ_d/σ_b determinada na Tabela 3.3 e tendo que a propagação de incertezas ϖ_f de uma função f dos desvios padrão de x (ϖ_x), de y (ϖ_y), etc., é dada por

$$\varpi = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 s_y^2 + \dots}, \quad (3.96)$$

então

$$\varpi_{\sigma_d} = \sqrt{\frac{GM_{200}}{2r_{200}}} \sqrt{\left(\frac{s_{M_{200}}}{2M_{200}}\right)^2 + \left(\frac{s_{r_{200}}}{2r_{200}}\right)^2}; \quad \varpi_{\frac{\sigma_d}{\sigma_b}} = \frac{\varpi_{\sigma_d}}{\sigma_b} \quad (3.97)$$

de onde é possível obter o valor médio e a incerteza propagada, de acordo com o redshift, realizando uma análise que conte com um ajuste linear de angulação nula (vez que a razão independe do redshift onde $\sigma_\alpha \propto 1/a$) e com peso direto, conforme presente na figura 3.8.

Identificação	$\sigma_b(km/s)$	$\sigma_d(km/s)$	σ_d/σ_b
RXCJ0003,8+0203	422	576 ± 38	$1,36 \pm 0,09$
Abell 3911	510	724 ± 51	$1,42 \pm 0,10$
Abell 3827	585	866 ± 52	$1,48 \pm 0,09$
RXCJ0049,4-2931	399	454 ± 41	$1,14 \pm 0,10$
Abell 2034	581	1233 ± 83	$2,12 \pm 0,14$
RXCJ1516,5-0056	428	781 ± 38	$1,82 \pm 0,09$
RXCJ2149,1-3041	399	605 ± 31	$1,52 \pm 0,08$
RXC1516,3+0005	506	656 ± 52	$1,30 \pm 0,10$
RXCJ1141,4-1216	428	801 ± 33	$1,87 \pm 0,08$
RXCJ1044,5-0704	434	663 ± 22	$1,53 \pm 0,05$
Abell 1068	466	881 ± 36	$1,89 \pm 0,08$
RXCJ2218,6-3853	555	972 ± 98	$1,75 \pm 0,18$
RXCJ0605,8-3518	486	775 ± 35	$1,59 \pm 0,07$
RXCJ0020,7-2542	524	1032 ± 149	$1,97 \pm 0,28$
Abell 1413	568	846 ± 27	$1,49 \pm 0,05$
RXCJ2048,1-1750	520	861 ± 90	$1,66 \pm 0,17$
RXCJ0547,6-3152	568	939 ± 98	$1,65 \pm 0,17$
Abell 2204	640	1182 ± 48	$1,85 \pm 0,08$

Identificação	$\sigma_b(km/s)$	$\sigma_d(km/s)$	σ_d/σ_b
RXCJ0958,3-1103	543	1084 ± 101	$2,00 \pm 0,19$
RXCJ2234,5-3744	644	1135 ± 191	$1,76 \pm 0,30$
RXCJ2014,8-2430	585	916 ± 35	$1,57 \pm 0,06$
RXCJ0645,4-5413	640	890 ± 77	$1,39 \pm 0,12$
Abell 1689	666	914 ± 29	$1,37 \pm 0,04$
Abell 383	461	777 ± 38	$1,69 \pm 0,08$
Abell 209	564	960 ± 75	$1,70 \pm 0,13$
Abell 963	560	870 ± 63	$1,55 \pm 0,11$
Abell 773	602	1058 ± 164	$1,76 \pm 0,27$
Abell 1763	589	745 ± 69	$1,26 \pm 0,12$
Abell 2390	735	1393 ± 36	$1,90 \pm 0,05$
Abell 2667	609	1199 ± 19	$1,97 \pm 0,03$
RXCJ2129,6+0005	515	823 ± 37	$1,60 \pm 0,07$
Abell 1835	644	1244 ± 55	$1,93 \pm 0,08$
RXCJ0307,0-2840	573	1051 ± 131	$1,84 \pm 0,23$
Abell 68	589	1223 ± 83	$2,08 \pm 0,14$
E1455+2232	491	728 ± 31	$1,48 \pm 0,06$
RXCJ2337,6+0016	589	907 ± 136	$1,54 \pm 0,23$
RXCJ0303,8-7752	602	1138 ± 111	$1,89 \pm 0,18$
RXCJ0532,9-3701	602	910 ± 129	$1,51 \pm 0,22$
RXCJ0232,2-4420	589	1173 ± 86	$1,99 \pm 0,15$
ZW 3146	581	945 ± 32	$1,63 \pm 0,06$
RXCJ0043,4-2037	573	793 ± 112	$1,39 \pm 0,19$
RXCJ0516,7-5430	602	1051 ± 158	$1,75 \pm 0,26$
RXCJ1131,9-1955	625	1070 ± 129	$1,71 \pm 0,21$

Tabela 3.3: Lista dos parâmetros obtidos das equações (3.94) e (3.95) e da Tabela 3.2.

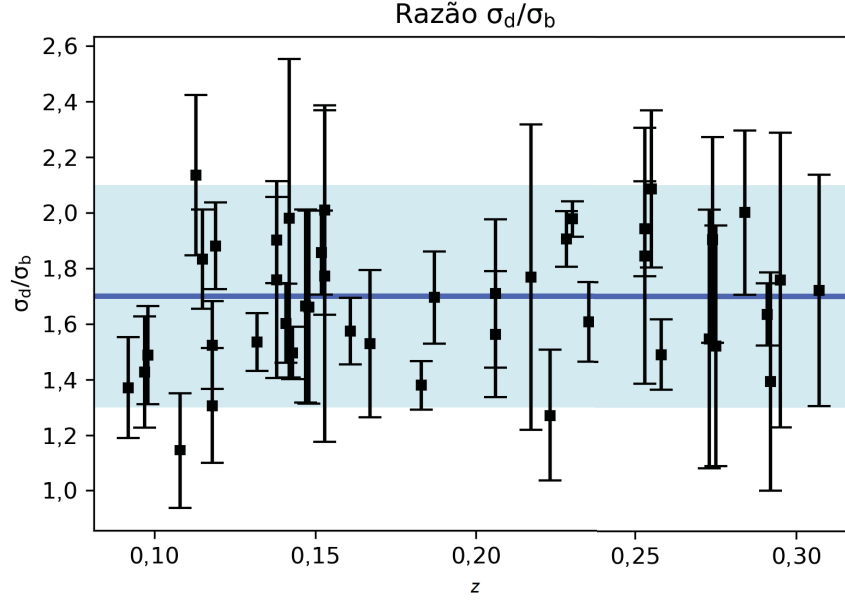


Figura 3.9: Análise de peso direto da razão σ_d/σ_b de acordo com o redshift (z) por meio da definição de uma função $\sigma_d/\sigma_b = \alpha + 0z$, onde $0z$ representa uma não dependência da razão em relação ao redshift vez que $\sigma \propto 1/a$. O resultado descreve um valor de $\alpha = 1,7 \pm 0,4$, ou seja, $\sigma_d/\sigma_b = 1,7 \pm 0,4$.

King III *et al* [74] apontam que a velocidade de dispersão na Via Láctea é 108 km s^{-1} entre 0 e 80 kpc , Battaglia [75], 108 km s^{-1} entre 0 e 80 kpc e Gnedin [76] 114 km s^{-1} entre 25 e 80 kpc , tais quais representam σ_d . A velocidade de dispersão na região próxima ao centro da galáxia (predominância de MB) é discutida por Gebhardt [77] e sugere $\sigma_b \approx 75 \text{ km s}^{-1}$. As respectivas razões entre σ_d (108 km s^{-1} , 108 km s^{-1} e 114 km s^{-1}) e $\sigma_b \approx 75 \text{ km s}^{-1}$ culminam em $\sigma_d/\sigma_b \approx 1,44$, $1,44$ e $1,52$.

Uma segunda possibilidade é assumir a distribuição de velocidades como sendo isotrópica e Maxwelliana, entretanto anisotropias e pequenos desvios da distribuição de velocidade Maxwelliana foram aparentemente verificados em diversos trabalhos que descrevem simulações contendo somente ME [78, 79, 80].

Novas simulações incluindo bárions demonstram que a distribuição espacial da ME possui a forma de um oblato de grande espessura ao redor dos discos galácticos que corotaciona com

o disco e alguns autores o denominaram de disco escuro (*dark disk*) [81, 82].

Ling [83], por meio de simulações numéricas, infere que a distribuição da velocidade de dispersão no dark disk da Via Láctea é $170,0 \text{ km s}^{-1}$, enquanto a velocidade de dispersão da MB é $92,7 \text{ km s}^{-1}$. Indicando que a razão da velocidade de dispersão da ME (σ_d) pela velocidade de dispersão da MB (σ_b) é $\sigma_d/\sigma_b \approx 1,83$, corroborando com as análises anteriores.

4

Instabilidade de Jeans para um Sistema Composto por Matéria Bariônica e Matéria Escura não Colisionais em uma Cosmologia EdS a partir da Equação de Boltzmann

4.1 Desenvolvimento Teórico do Modelo

A evolução da função distribuição (f) no espaço de fase é regida pela posição e pela velocidade e é submetida à equação de Boltzmann. Portanto, considerando um sistema esférico composto por b (MB) e d (ME) não interagentes nem auto-interagentes (as partículas apenas interagem por meio da força gravitacional) inseridos em um meio homogêneo e isotrópico em expansão.

Podendo-se assumir a cosmologia EdS, tomando novamente a equação (2.44)

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3, \quad (4.1)$$

a equação de Boltzmann com a função distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann (com $f_M = f_\alpha$) para um sistema sem colisões e na presença de um potencial gravitacional Φ é

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha - \nabla \Phi \cdot \partial_{\vec{v}} f_\alpha = 0, \quad (4.2)$$

ressaltando que $\nabla \Phi = -\vec{F}/m$ é a única força agindo no sistema e é unicamente gravitacional e $\alpha = b, d$. Sabendo que conexão entre as duas funções de distribuição de velocidades e o

potencial gravitacional é fornecido pela equação de Poisson (4.3)

$$\nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G(\rho_b + \rho_d) = 4\pi G \left(\int m_b f_b d^3v + \int m_d f_d d^3v \right), \quad (4.3)$$

onde as funções distribuição em coordenadas comóveis podem ser descritas como

$$f_\alpha^0(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{\rho_\alpha}{m_\alpha} \frac{1}{(2\pi\sigma_\alpha^2)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\vec{v} - \frac{\dot{a}}{a}\vec{r})^2}{2\sigma_\alpha^2} \right] \quad (4.4)$$

em que σ_α é a velocidade térmica de dispersão da partícula α e $f_\alpha^0(\vec{r}, \vec{v}, t)$ satisfaz as equações de Boltzmann e de Poisson. Realizando uma pequena perturbação nesta distribuição ($h_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$), tem-se que a nova função distribuição é

$$f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = f_\alpha^0(\vec{r}, \vec{v}, t)[1 + h_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)] \quad (4.5)$$

onde a perturbação $h_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ pode ser representada por uma onda plana com um vetor de número de onda \vec{q}/a na forma

$$h_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = h_\alpha^1(\vec{r}, \vec{v}, t) \exp \left(i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}}{a} \right) \quad (4.6)$$

em que o fator $1/a$ no número de onda reflete o estiramento do comprimento de onda em um universo em expansão e $h_\alpha^1(\vec{r}, \vec{v}, t)$ pode ser dado por uma combinação dos invariantes de colisão da equação de Boltzmann em coordenadas comóveis

$$h_\alpha^1(\vec{r}, \vec{v}, t) \equiv A_\alpha(t) + \vec{B}_\alpha(t) \cdot \left(\vec{v} - \frac{\dot{a}}{a}\vec{r} \right) + D_\alpha(t) \left(\vec{v} - \frac{\dot{a}}{a}\vec{r} \right)^2. \quad (4.7)$$

Definindo o potencial gravitacional como

$$\Phi_0 = \frac{2\pi}{3} G(\rho_b + \rho_d) r^2 \quad (4.8)$$

e impondo uma certa perturbação

$$\Phi_1(\vec{r}, t) = \phi(t) \exp \left(i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}}{a} \right) \quad (4.9)$$

onde $\phi(t)$ é uma amplitude e, então, o novo potencial gravitacional é

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_0(\vec{r}, t) + \Phi_1(\vec{r}, t). \quad (4.10)$$

Inserindo as equações (4.5) e (4.10) nas equações (4.2) e (4.3) com o auxílio das equações (4.4) e (4.6), respectivamente,

$$f_\alpha^0 \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla h_\alpha - \nabla \Phi_0 \cdot \frac{\partial h_\alpha}{\partial \vec{v}} \right) - \nabla \Phi_1 \cdot \frac{\partial f_\alpha^0}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (4.11)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \left(\int m_b f_b h_b d^3v + \int m_d f_d h_d d^3v \right) \quad (4.12)$$

tendo que os produtos $\nabla \Phi_1$ com h_α e com $\partial f_\alpha^0 / \partial \vec{v}$ foram negligenciados.

Tomando a equação (4.11) com o auxílio das equações (4.4) e (4.6)-(4.9), tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{A}_\alpha + \dot{\vec{B}}_\alpha \left(\vec{v} - r \frac{\dot{a}}{a} \right) + \dot{D}_\alpha \left(\vec{v} - r \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{\dot{a}}{a} \left[\vec{B}_\alpha + 2 \left(\vec{v} - r \frac{\dot{a}}{a} \right) D_\alpha \right] \left(\vec{v} - r \frac{\dot{a}}{a} \right) \\ + \left[A_\alpha + \vec{B}_\alpha \left(\vec{v} - r \frac{\dot{a}}{a} \right) + D_\alpha \left(\vec{v} - r \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\phi}{\sigma_\alpha^2} \right] \frac{i\vec{q}}{a} \left(\vec{v} - r \frac{\dot{a}}{a} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

definindo $B_\alpha = \vec{B}_\alpha(t) \cdot \vec{q}$, $A_\alpha = A_\alpha(t)$, $D_\alpha = D_\alpha(t)$ e $\phi = \phi(t)$, multiplicando pelos invariantes de colisão da equação de Boltzmann em coordenadas comóveis $(1, (\vec{v} - \frac{\dot{a}}{a}\vec{r}), (\vec{v} - \frac{\dot{a}}{a}\vec{r})^2)$ e integrando em $d\vec{v}$, resultam em

$$\begin{cases} \dot{A}_\alpha + 3\sigma^2 \dot{D}_\alpha + i \frac{\sigma_\alpha^2}{a} B_\alpha - 6 \frac{\dot{a}}{a} \sigma^2 D_\alpha = 0 \\ \dot{B}_\alpha + i \frac{q^2}{a} \left[A_\alpha + 5\sigma^2 D_\alpha + \frac{\phi}{\sigma^2} \right] - \frac{\dot{a}}{a} B_\alpha = 0 \\ 3\dot{A}_\alpha + 15\sigma^2 \dot{D}_\alpha + 5i \frac{\sigma_\alpha^2}{a} B_\alpha - 30 \frac{\dot{a}}{a} \sigma^2 D_\alpha = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

de onde é possível verificar que a primeira e a terceira equações são linearmente dependentes e multiplicando a primeira equação por 5, tem-se que $5\dot{A}_\alpha = 3\dot{A}_\alpha$, donde se tem que $\dot{A}_\alpha = 0$.

Assim é possível definir $A_\alpha = 1$ e, conseqüentemente, obter as seguintes equações

$$3\sigma_\alpha^2 \dot{D}_\alpha + i \frac{\sigma_\alpha^2}{a} B_\alpha - 6 \frac{\dot{a}}{a} \sigma_\alpha^2 D_\alpha = 0 \quad (4.15)$$

e

$$\dot{B}_\alpha + i \frac{q^2}{a} \left(1 + 5\sigma_\alpha^2 D_\alpha + \frac{\phi}{\sigma_\alpha^2} \right) - \frac{\dot{a}}{a} B_\alpha = 0 \quad (4.16)$$

Inserindo as equações (4.9) e (4.8) em (4.12) temos que

$$\frac{q^2}{a^2} \phi + 4\pi G \left\{ [1 + 3\sigma_b^2 D_b] \rho_b + [1 + 3\sigma_d^2 D_d] \rho_d \right\} = 0. \quad (4.17)$$

Isolando B_α da equação (4.15), derivando-o em função do tempo, isolando ϕ da equação (4.17) e inserindo B_α , \dot{B}_α e ϕ na equação (4.16), definindo o contraste de densidade como $\delta_\alpha = \rho_\alpha/\bar{\rho}_\alpha = 1 + 3\sigma_\alpha^2 D_\alpha$,

$$\dot{\delta}_\alpha = 3\sigma_\alpha^2 \dot{D}_\alpha - \frac{6\dot{a}\sigma_\alpha^2}{a} D_\alpha, \quad (4.18)$$

e

$$\ddot{\delta}_\alpha = 3\sigma_\alpha^2 \ddot{D}_\alpha - \frac{12\dot{a}\sigma_\alpha^2}{a} \dot{D}_\alpha + \frac{18\dot{a}^2\sigma_\alpha^2}{a^2} D_\alpha - \frac{6\ddot{a}\sigma_\alpha^2}{a} D_\alpha, \quad (4.19)$$

de forma que a solução de (4.15-4.17) se torna

$$\ddot{\delta}_\alpha + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta}_\alpha + \frac{q^2\sigma_\alpha^2}{3a^2} (5\delta_\alpha - 2) - 4\pi G(\delta_b\rho_b + \delta_d\rho_d) = 0 \quad (4.20)$$

que, juntamente às normalizações

$$\lambda_J^0 = \frac{2\pi v_s^0}{\sqrt{4\pi G(\rho_b^0 + \rho_d^0)}}; \quad v_s^0 = \sqrt{\frac{5}{3} \frac{\rho_b^0\sigma_b^{02} + \rho_d^0\sigma_d^{02}}{\rho_b^0 + \rho_d^0}} \quad (4.21)$$

$$\lambda_0 = \frac{2\pi a_0}{q}; \quad \tau = \sqrt{6\pi G(\rho_b^0 + \rho_d^0)t^2}; \quad a = a_0[6\pi G(\rho_b^0 + \rho_d^0)t^2]^{1/3} \quad (4.22)$$

e à definição $d/d\tau = '$, e multiplicando por τ^2 tem-se que

$$\tau^2 \delta_\alpha'' + \frac{4}{3} \tau \delta_\alpha' + \frac{2}{5\tau^{2/3}} \left[\frac{\lambda_J^{02}}{\lambda_0^2} \frac{\sigma_\alpha^0(\rho_b^0 + \rho_d^0)}{\rho_b^0\sigma_b^{02} + \rho_d^0\sigma_d^0} \right] [5\delta_\alpha - 2] - \frac{2}{3} \left[\frac{\delta_b\rho_b^0 + \delta_d\rho_d^0}{\rho_b^0 + \rho_d^0} \right] = 0 \quad (4.23)$$

onde foi assumido que $\sigma_\alpha \propto 1/a$.

Portanto, o conjunto de equações a serem resolvidas é

$$\tau^2 \delta_b'' + \frac{4}{3} \tau \delta_b' + \frac{2}{5\tau^{2/3}} \left[\frac{\lambda_J^{02}}{\lambda_0^2} \frac{\sigma_b^0(\rho_b^0 + \rho_d^0)}{\rho_b^0\sigma_b^{02} + \rho_d^0\sigma_d^0} \right] [5\delta_b - 2] - \frac{2}{3} \left[\frac{\delta_b\rho_b^0 + \delta_d\rho_d^0}{\rho_b^0 + \rho_d^0} \right] = 0 \quad (4.24)$$

$$\tau^2 \delta_d'' + \frac{4}{3} \tau \delta_d' + \frac{2}{5\tau^{2/3}} \left[\frac{\lambda_J^{02}}{\lambda_0^2} \frac{\sigma_d^0(\rho_b^0 + \rho_d^0)}{\rho_b^0\sigma_b^{02} + \rho_d^0\sigma_d^0} \right] [5\delta_d - 2] - \frac{2}{3} \left[\frac{\delta_b\rho_b^0 + \delta_d\rho_d^0}{\rho_b^0 + \rho_d^0} \right] = 0 \quad (4.25)$$

4.2 Análise dos Impactos da razão σ_d/σ_b sobre a Evolução dos Contrastes de Densidade

Fazendo uso das equações (4.24) e (4.25) que oferecem o comportamento dos contrastes de densidade dos componentes do sistema em função do tempo adimensional com $\sigma_d^0/\sigma_b^0 = \sigma_d/\sigma_b = 1,83$ (vez que $\sigma_\alpha \propto 1/a$) e $\rho_d^0/\rho_b^0 = \rho_d/\rho_b = 5,5$ (conforme discutido no capítulo 3), os seguintes gráficos com $\lambda_J = 0, 1\lambda_0$ e com $\lambda_J = 10\lambda_0$ culminam

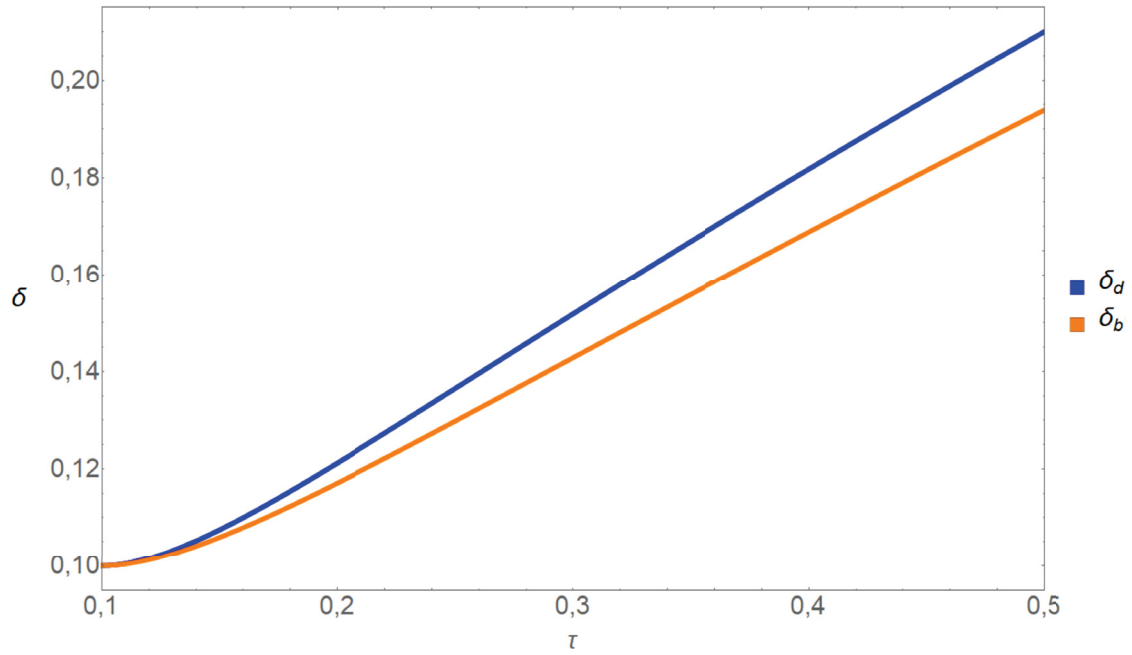


Figura 4.1: Análise da dependência dos contrastes de densidade em função do tempo adimensional com $\lambda_J = 0.1\lambda_0$ e $\sigma_d/\sigma_b = 1,83$.

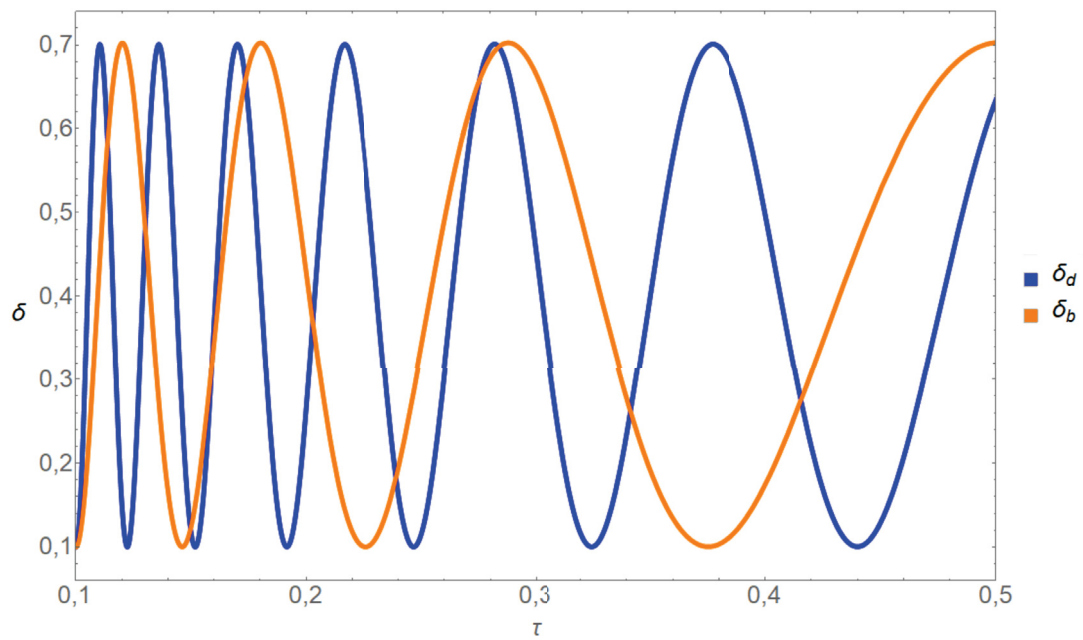


Figura 4.2: Análise da dependência dos contrastes de densidade em função do tempo adimensional com $\lambda_J = 10\lambda_0$ e $\sigma_d/\sigma_b = 1,83$.

O gráfico representado na figura 4.1 indica que, quando $\lambda_J < \lambda_0$, existe um aumento do contraste de densidade da ME e da MB, já o gráfico da figura 4.2 indica que, se $\lambda_0 < \lambda_J$, o sistema sofre com oscilações, mas tende à estabilidade.

Neste caso, a variação da razão σ_d/σ_b afeta o contraste de densidade da maneira presente nas figuras 4.3, 4.4 e 4.5

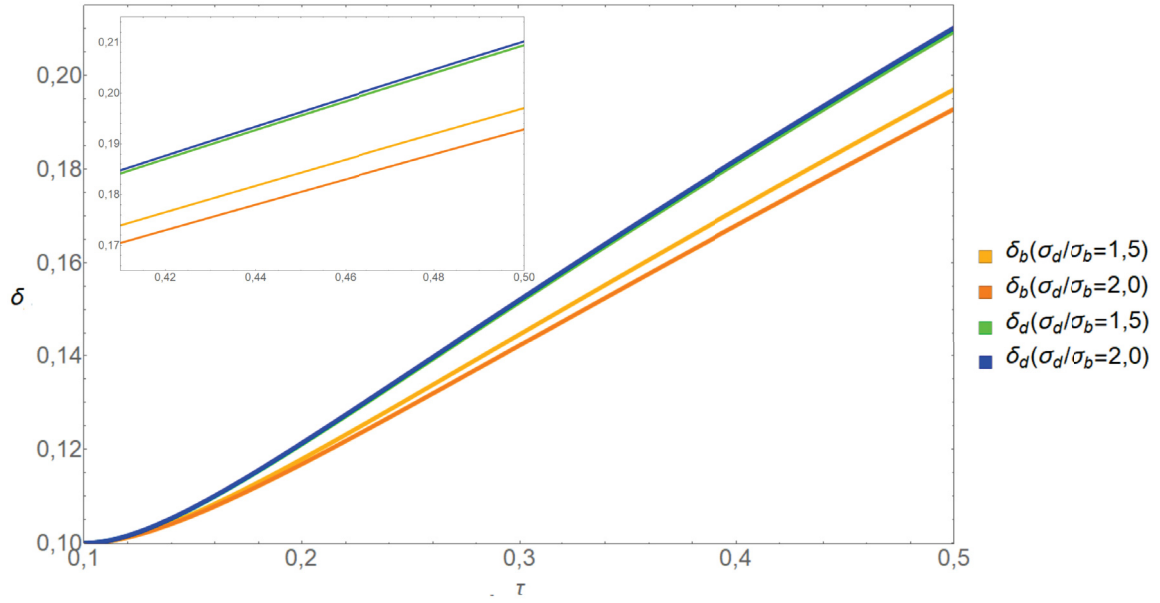


Figura 4.3: Análise da dependência do δ_b e do δ_d em função do tempo adimensional com $\lambda_J = 0,1\lambda_0$ para os valores de 1,5 e 2,0 da razão σ_d/σ_b .

Os valores de 1,5 e 2,0 para a razão σ_d/σ_b com $\lambda_J = 0,1\lambda_0$ foram escolhidos para que houvesse diferença visível da evolução do δ_d , já que este sofre menor impacto da variação da respectiva razão, conforme sugere a figura anterior.

O aumento da razão σ_d/σ_b acarreta em uma propagação mais acelerada do δ_d e uma propagação menos acelerada do δ_b , sendo que este último contraste de densidade é afetado de maneira mais intensa.

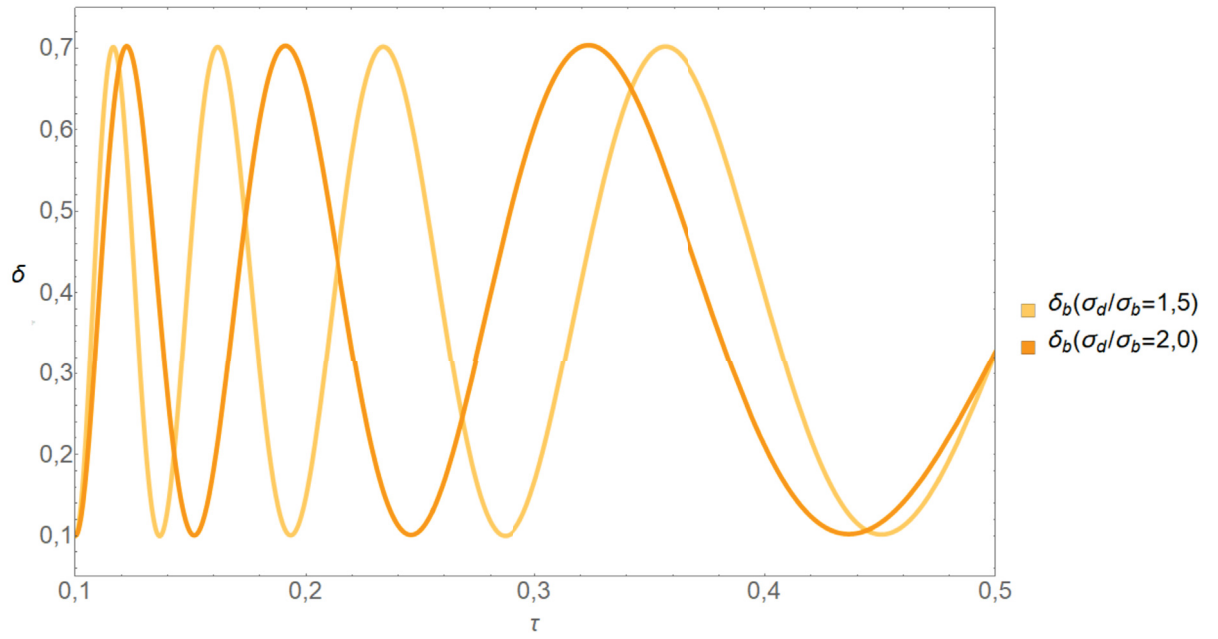


Figura 4.4: Análise da dependência do δ_b em função do tempo adimensional com $\lambda_J = 10\lambda_0$ para os valores de 1,5 e 2,0 da razão σ_d/σ_b .

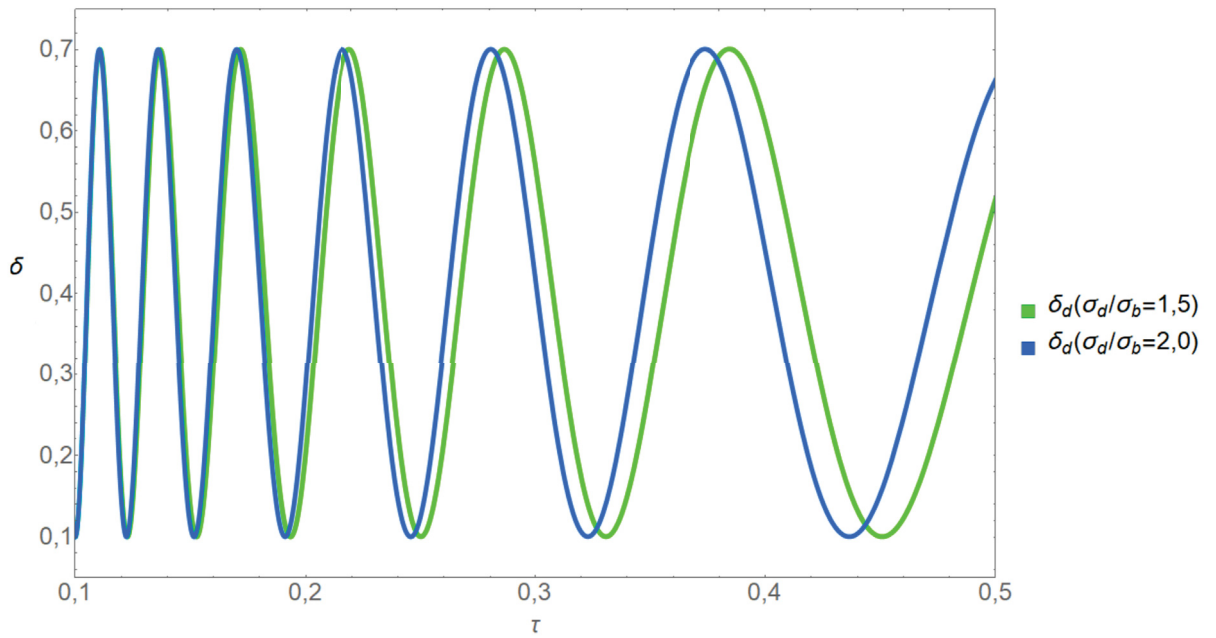


Figura 4.5: Análise da dependência do δ_d em função do tempo adimensional com $\lambda_J = 10\lambda_0$ para os valores de 1,5 e 2,0 da razão σ_d/σ_b .

A figura 4.4, por outro lado, indica um aumento proporcional do comprimento de onda da evolução do δ_b para com σ_d/σ_b , comportamento oposto e de maior efeito quando comparado à figura 4.5 (δ_d).

4.3 Análise da Massa de Jeans do Modelo Proposto

Como mencionado no capítulo 3, a Massa de Jeans é uma parte determinante da teoria descrita por Jeans, pois, a partir desta, é possível determinar a massa crítica para que o sistema colapse sobre a incidência de uma perturbação.

A Massa de Jeans do sistema composto por MB e ME (M_J^{db}) é

$$M_J^{db} = \frac{\pi(\rho_b + \rho_d)}{6} \left[\frac{5\pi}{3G} \frac{\rho_b \sigma_b^2 + \rho_d \sigma_d^2}{(\rho_b + \rho_d)^2} \right]^{3/2}, \quad (4.26)$$

sendo que

$$\lambda_J^0 = \frac{2\pi v_s^0}{\sqrt{4\pi G(\rho_b^0 + \rho_d^0)}} (1+z)^{-3/2}; \quad v_s = \sqrt{\frac{5}{3} \frac{\rho_b \sigma_b^2 + \rho_d \sigma_d^2}{\rho_b + \rho_d}}, \quad (4.27)$$

e $\rho_\alpha = \rho_\alpha^0 (1+z)^3$ e $\sigma_\alpha \propto 1/a \propto (1+z)$, ou seja, $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha^0 (1+z)$, assim,

$$M_J^{db} = \frac{\pi(\rho_b^0 + \rho_d^0)}{6} \left[\frac{5\pi}{3G} \frac{\rho_b^0 \sigma_b^{02} + \rho_d^0 \sigma_d^{02}}{(\rho_b^0 + \rho_d^0)^2} \right]^{3/2} (1+z)^{3/2} \quad (4.28)$$

e sua dependência de z e σ_d/σ_b pode ser melhor observada na figura 4.6

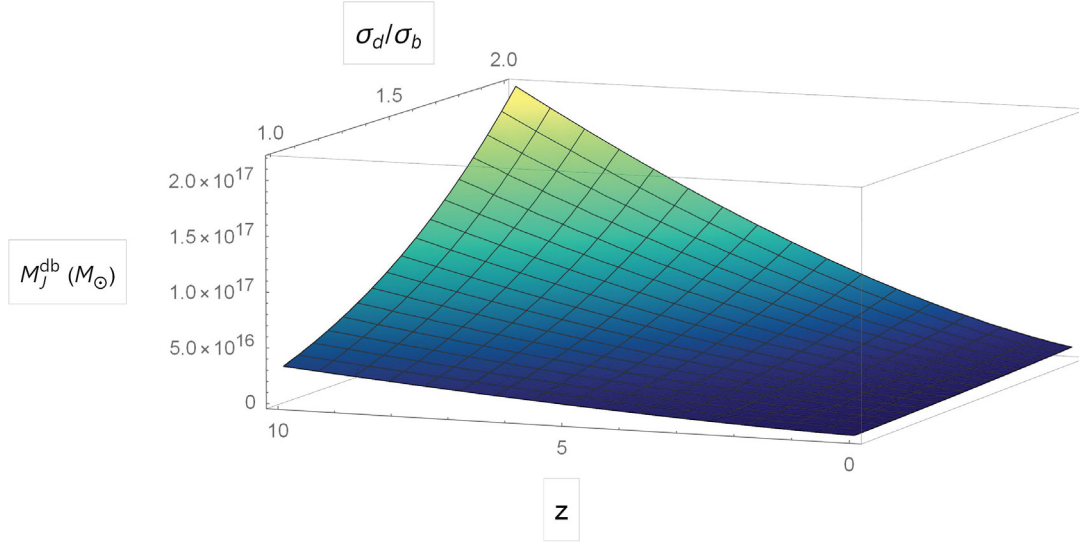


Figura 4.6: Análise da dependência da Massa de Jeans do sistema composto por MB e ME em relação ao redshift e à razão σ_d/σ_b para um sistema de valores típicos de aglomerados de galáxias $\rho_b^0 \approx 10^{-25} \text{ kg/m}^3$ e $\sigma_b^0 \approx 5 \times 10^5 \text{ m/s}$.

Enquanto a Massa de Jeans de um sistema composto puramente por ME (M_J^d) é

$$M_J^d = \frac{\pi \rho_d^0}{6} \left[\frac{5\pi}{3G} \frac{\sigma_d^{02}}{\rho_d^0} \right]^{3/2} (1+z)^{3/2}, \quad (4.29)$$

a razão M_J^{db}/M_J^d é dada por

$$\frac{M_J^{db}}{M_J^d} = \frac{M_J^{db0}}{M_J^{d0}} = \frac{\rho_b^0 + \rho_d^0}{\rho_d^0} \left[\frac{\rho_b^0 \sigma_b^{02} + \rho_d^0 \sigma_d^{02}}{\sigma_d^{02}} \frac{\rho_d^0}{(\rho_b^0 + \rho_d^0)^2} \right]^{3/2} \quad (4.30)$$

e sua dependência com a razão σ_d/σ_b é

σ_d/σ_b	1,00	1,20	1,40	1,60	1,83	2,00	2,20
M_J^{db}/M_J^d	0,9199	0,8558	0,8179	0,7936	0,7751	0,7653	0,7567

Tabela 4.1: Razão da Massa de Jeans de um sistema composto por MB e ME (M_J^{db}) pela Massa de Jeans de um sistema composto puramente de ME (M_J^d) em função da razão σ_d/σ_b conforme a equação 4.30.

Ou seja, para o valor esperado de $\sigma_d/\sigma_b = 1,83$, a massa do sistema composto por MB e ME em um universo em expansão é aproximadamente 78% da massa de um sistema composto

puramente de ME em um universo em expansão.

Fazendo uso das relações dentre M_J^{db} e λ_J^{db} (equações 4.26 e 4.27), tem-se que

$$\lambda_J^{db} = \sqrt{\frac{5\pi(\rho_b^0(\sigma_b^0)^2 + \rho_d^0(\sigma_d^0)^2)}{3G(\rho_b^0 + \rho_d^0)^2}}(1+z)^{-1/2} \quad (4.31)$$

e

$$M_J^{db} = \frac{4\pi}{3}(\rho_b^0 + \rho_d^0)(1+z)^3 \left(\frac{\lambda_J^{db}}{2}\right)^3, \quad (4.32)$$

respectivamente.

Tendo ainda que a relação entre M_{200} e r_{200} pode ser descrita como

$$M_{200} = \frac{4\pi}{3}(\rho_b^0 + \rho_d^0)(1+z)^3 r_{200}^3 \quad (4.33)$$

onde $\rho_d/\rho_b = 5,5$, então

$$\rho_b^0 = \frac{3}{26\pi} \frac{M_{200}}{r_{200}^3} \frac{1}{(1+z)^3} \quad (4.34)$$

e, obviamente, $\rho_d^0 = 5,5\rho_b^0$,

Desta forma, podemos computar os valores de ρ_b^0 , ρ_d^0 , M_J , e da razão M_J/M_{200} para os aglomerados de galáxias apresentados na tabela 3.1 e, fazendo uso da tabela 3.2, emerge a tabela 4.2.

Identificação	$\rho_b^0(10^{-25}kg/m^3)$	$\rho_d^0(10^{-25}kg/m^3)$	$M_J(10^{14}M_\odot)$	M_J/M_{200}
RXCJ0003,8+0203	$1,94 \pm 0,39$	$10,64 \pm 2,12$	$10,08 \pm 2,03$	$5,30 \pm 1,25$
Abell 3911	$1,82 \pm 0,38$	$10,00 \pm 2,10$	$20,56 \pm 4,42$	$5,30 \pm 1,33$
Abell 3827	$1,82 \pm 0,31$	$10,00 \pm 1,73$	$34,92 \pm 6,43$	$5,28 \pm 1,13$
RXCJ0049,4-2931	$1,82 \pm 0,45$	$10,00 \pm 2,48$	$5,51 \pm 1,42$	$5,86 \pm 1,83$
Abell 2034	$2,05 \pm 0,43$	$11,27 \pm 2,35$	$91,16 \pm 19,16$	$5,17 \pm 1,26$
RXCJ1516,5-0056	$1,82 \pm 0,27$	$10,01 \pm 1,47$	$25,15 \pm 3,86$	$5,32 \pm 0,94$
RXCJ2149,1-3041	$1,79 \pm 0,27$	$9,85 \pm 1,51$	$12,25 \pm 1,97$	$5,54 \pm 1,03$
RXC1516,3+0005	$1,77 \pm 0,44$	$9,74 \pm 2,41$	$16,35 \pm 3,88$	$5,76 \pm 1,60$
RXCJ1141,4-1216	$1,97 \pm 0,25$	$10,84 \pm 1,37$	$26,14 \pm 3,47$	$5,36 \pm 0,82$
RXCJ1044,5-0704	$1,78 \pm 0,17$	$9,80 \pm 0,96$	$16,45 \pm 1,65$	$5,75 \pm 0,68$
Abell 1068	$1,94 \pm 0,24$	$10,64 \pm 1,31$	$35,89 \pm 4,70$	$5,60 \pm 0,85$
RXCJ2218,6-3853	$1,87 \pm 0,56$	$10,26 \pm 3,10$	$49,72 \pm 15,80$	$5,68 \pm 2,09$
RXCJ0605,8-3518	$1,79 \pm 0,26$	$9,85 \pm 1,41$	$26,14 \pm 3,64$	$5,82 \pm 0,93$

Identificação	$\rho_b^0(10^{-25}kg/m^3)$	$\rho_d^0(10^{-25}kg/m^3)$	$M_J(10^{14}M_\odot)$	M_J/M_{200}
RXCJ0605,8-3518	$1,79 \pm 0,26$	$9,85 \pm 1,41$	$26,14 \pm 3,64$	$5,82 \pm 0,93$
RXCJ0020,7-2542	$2,01 \pm 0,87$	$11,07 \pm 4,76$	$56,62 \pm 25,24$	$5,65 \pm 2,93$
Abell 1413	$1,64 \pm 0,19$	$9,01 \pm 1,05$	$36,34 \pm 3,89$	$5,94 \pm 0,71$
RXCJ2048,1-1750	$1,89 \pm 0,62$	$10,41 \pm 3,41$	$35,07 \pm 11,29$	$5,88 \pm 2,19$
RXCJ0547,6-3152	$1,82 \pm 0,58$	$10,01 \pm 3,16$	$46,47 \pm 14,88$	$5,89 \pm 2,20$
Abell 2204	$1,75 \pm 0,21$	$9,64 \pm 1,18$	$93,16 \pm 12,39$	$5,85 \pm 0,89$
RXCJ0958,3-1103	$1,86 \pm 0,54$	$10,21 \pm 2,99$	$69,13 \pm 20,71$	$5,79 \pm 1,99$
RXCJ2234,5-3744	$1,94 \pm 0,97$	$10,65 \pm 5,33$	$79,13 \pm 41,67$	$5,90 \pm 3,60$
RXCJ2014,8-2430	$1,65 \pm 0,18$	$9,08 \pm 1,01$	$46,57 \pm 5,44$	$6,16 \pm 0,84$
RXCJ0645,4-5413	$1,56 \pm 0,41$	$8,58 \pm 2,24$	$45,48 \pm 11,99$	$6,42 \pm 1,98$
Abell 1689	$1,62 \pm 0,14$	$8,93 \pm 0,78$	$49,47 \pm 4,39$	$6,72 \pm 0,72$
Abell 383	$1,67 \pm 0,29$	$9,20 \pm 1,58$	$28,77 \pm 4,44$	$6,50 \pm 1,14$
Abell 209	$1,50 \pm 0,35$	$8,27 \pm 1,95$	$58,49 \pm 13,94$	$6,80 \pm 1,89$
Abell 963	$1,63 \pm 0,34$	$8,94 \pm 1,88$	$42,62 \pm 9,29$	$6,91 \pm 1,77$
Abell 773	$1,62 \pm 0,75$	$8,93 \pm 4,15$	$75,98 \pm 36,28$	$6,95 \pm 3,86$
Abell 1763	$1,30 \pm 0,34$	$7,12 \pm 1,84$	$32,27 \pm 9,08$	$7,59 \pm 2,51$
Abell 2390	$1,62 \pm 0,14$	$8,88 \pm 0,74$	$174,15 \pm 14,50$	$7,05 \pm 0,67$
Abell 2667	$1,58 \pm 0,08$	$8,69 \pm 0,47$	$111,98 \pm 5,56$	$7,05 \pm 0,40$
RX J2129,6+0005	$1,42 \pm 0,19$	$7,79 \pm 1,04$	$39,81 \pm 5,39$	$7,37 \pm 1,16$
Abell 1835	$1,53 \pm 0,20$	$8,42 \pm 1,12$	$130,97 \pm 17,25$	$7,47 \pm 1,15$
RXCJ0307,0-2840	$1,57 \pm 0,58$	$8,63 \pm 3,22$	$78,63 \pm 30,57$	$7,53 \pm 3,40$
Abell 68	$1,66 \pm 0,34$	$9,12 \pm 1,89$	$118,72 \pm 25,24$	$7,44 \pm 1,83$
E1455+2232	$1,39 \pm 0,17$	$7,66 \pm 0,94$	$29,02 \pm 3,61$	$7,93 \pm 1,17$
RXCJ2337,6+0016	$1,45 \pm 0,62$	$7,98 \pm 3,42$	$55,52 \pm 25,23$	$8,15 \pm 4,35$
RXCJ0303,8-7752	$1,50 \pm 0,45$	$8,27 \pm 2,50$	$104,06 \pm 31,35$	$7,88 \pm 2,75$
RXCJ0532,9-3701	$1,45 \pm 0,58$	$7,97 \pm 3,20$	$56,47 \pm 24,78$	$8,21 \pm 4,21$
RXCJ0232,2-4420	$1,51 \pm 0,35$	$8,29 \pm 1,92$	$114,23 \pm 27,12$	$7,80 \pm 2,18$
ZW 3146	$1,36 \pm 0,14$	$7,47 \pm 0,75$	$65,53 \pm 7,30$	$8,21 \pm 1,08$
RXCJ0043,4-2037	$1,31 \pm 0,52$	$7,18 \pm 2,84$	$41,04 \pm 16,94$	$8,73 \pm 4,28$

Identificação	$\rho_b^0(10^{-25}kg/m^3)$	$\rho_d^0(10^{-25}kg/m^3)$	$M_J(10^{14}M_\odot)$	M_J/M_{200}
RXCJ0516,7-5430	$1,42 \pm 0,65$	$7,83 \pm 3,58$	$87,39 \pm 40,53$	$8,37 \pm 4,52$
RXCJ1131,9-1955	$1,31 \pm 0,48$	$7,23 \pm 2,64$	$97,67 \pm 37,11$	$8,64 \pm 3,80$
ZW 3146	$1,36 \pm 0,14$	$7,47 \pm 0,75$	$65,53 \pm 7,30$	$8,21 \pm 1,08$
RXCJ0043,4-2037	$1,31 \pm 0,52$	$7,18 \pm 2,84$	$41,04 \pm 16,94$	$8,73 \pm 4,28$
RXCJ0516,7-5430	$1,42 \pm 0,65$	$7,83 \pm 3,58$	$87,39 \pm 40,53$	$8,37 \pm 4,52$
RXCJ1131,9-1955	$1,31 \pm 0,48$	$7,23 \pm 2,64$	$97,67 \pm 37,11$	$8,64 \pm 3,80$

Tabela 4.2: Lista dos parâmetros obtidos a partir das tabelas 3.1 e 3.2 e das equações (4.32)-(4.34).

Na tabela 4.2, as propagações dos desvios padrão (ϖ) foram dados segundo as equações (4.35)-(4.37) que seguem

$$\varpi_{\rho_b^0} = \rho_b^0 \sqrt{\left(\frac{\varpi_{M_{200}}}{M_{200}}\right)^2 + \left(\frac{3\varpi_{r_{200}}}{r_{200}}\right)^2}; \quad \varpi_{\rho_d^0} = 5,5\varpi_{\rho_b^0} \quad (4.35)$$

$$\varpi_{M_J} = M_J \sqrt{\left(\frac{\varpi_{\rho_d^0}}{2\rho_d^0}\right)^2 + \left(\frac{3\sigma_d^0\varpi_{\sigma_d^0}}{\rho_b^0/\rho_d^0 + (\sigma_b^0\varpi_{\sigma_b^0})^2}\right)^2} \quad (4.36)$$

$$\varpi_{\frac{M_J}{M_{200}}} = \frac{M_J}{M_{200}} \sqrt{\left(\frac{\varpi_{M_J}}{M_J}\right)^2 + \left(\frac{\varpi_{M_{200}}}{M_{200}}\right)^2} \quad (4.37)$$

Da tabela 4.2 emerge a figura 4.7, onde foi utilizado um ajuste linear com peso direto.

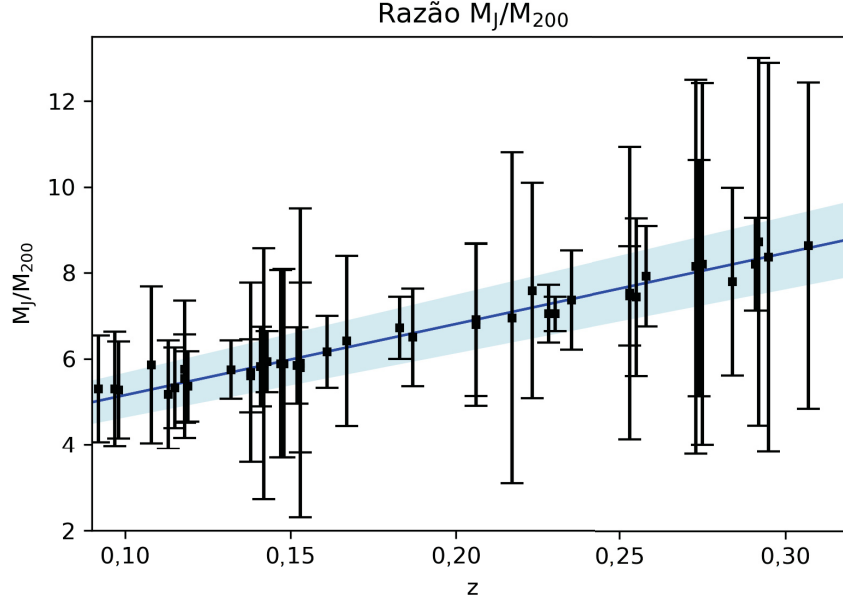


Figura 4.7: Análise de peso direto da razão M_J/M_{200} de acordo com o redshift (z) resultando em um valor de interceptação do eixo y em $y = 3,5 \pm 0,4$ com uma inclinação de 17 ± 2 .

Desta forma, a razão M_J/M_{200} é dada por $M_J/M_{200} = (3,5 \pm 0,4) + (17 \pm 2)z$.

4.4 Discussão

Conforme pôde-se observar, o contraste de densidade de um sistema composto por MB e ME em um universo em expansão derivado a partir da equação de Boltzmann e da equação de Poisson respeitou a Teoria de Jeans e descreveu o "cutoff" (limite) entre a estabilidade e a instabilidade do sistema.

O δ_b para $\lambda_J = 0,1\lambda_0$ demonstrou se propagar de maneira menos intensa que o δ_d . Este fato, provavelmente, se deve à maior densidade da ME no sistema. Isto também explicaria a maior frequência de oscilação do δ_d para $\lambda_J = 10\lambda_0$.

O contraste de densidade, de acordo com a razão σ_d/σ_b , varia diferentemente para cada tipo de constituinte. Isto provavelmente se deve à normalização adotada, o acréscimo desta razão acarreta em uma propagação mais acelerada do δ_d e uma propagação menos acelerada do δ_b para $\lambda_J = 0,1\lambda_0$. Da mesma maneira, o acréscimo da razão aumenta o comprimento

de onda do δ_b e possui efeito oposto e de menor intensidade no comprimento de onda do δ_d para $\lambda_J = 10\lambda_0$.

Por outro lado, a massa de Jeans calculada para um sistema composto por MB e ME é menor que a massa de Jeans para um sistema composto unicamente por ME, como o esperado. Esta relação também é dependente da razão σ_d/σ_b e M_J^{db}/M_J^d decresce de forma não linear com o aumento de σ_d/σ_b .

Já a figura 4.7 aparenta indicar que a razão M_J/M_{200} depende do redshift conforme $M_J/M_{200} \propto 17z$, entretanto, uma análise mais profunda ainda precisa ser realizada para verificar o motivo desta dependência.

Instabilidade de Jeans para um Sistema Composto por Matéria Escura Auto-interagente em uma Cosmologia EdS a partir da Equação de Boltzmann

5.1 Desenvolvimento Teórico do Modelo

A considerar um sistema esférico composto por d (ME) auto-interagente inserida em um meio homogêneo e isotrópico em expansão (Cosmologia EdS) vez que um modelo composto por ME e MB auto-interagentes se torna de difícil compreensão física.

Podendo-se assumir a cosmologia EdS em que, tomando novamente a equação (2.44)

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3, \quad (5.1)$$

a equação de Boltzmann para o componente auto-interagente (ME- d) com a função distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann é

$$\frac{\partial f_d^0}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_d^0 - \nabla \Phi \cdot \partial_{\vec{v}} f_d^0 = -\nu_d f_d^0 h_d \quad (5.2)$$

ressaltando que $\nabla \Phi = -\vec{F}/m$ é a única força externa agindo no sistema e é unicamente gravitacional e dada a equação de Poisson

$$\nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \rho_d = 4\pi G \int m_d f_d d^3v. \quad (5.3)$$

onde ν_d é a frequência de colisão da ME (conforme discute o item 3.5.4).

A função distribuição em coordenadas comóveis pode ser descrita como

$$f_d^0(\vec{r}, \vec{v}_d, t) = \frac{\rho_d}{m_d} \frac{1}{(2\pi\sigma_d^2)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\vec{v} - \frac{\dot{a}}{a}\vec{r})^2}{2\sigma_d^2} \right] \quad (5.4)$$

em que σ_d é a velocidade térmica de dispersão da partícula de ME e $f_d^0(\vec{r}, \vec{v}_d, t)$ satisfaz as equações de Boltzmann e de Poisson. Realizando uma pequena perturbação nesta distribuição ($h_d(\vec{r}, \vec{v}_d, t)$), tem-se que a nova função distribuição é

$$f_d(\vec{r}, \vec{v}_d, t) = f_d^0(\vec{r}, \vec{v}, t)[1 + h_d(\vec{r}, \vec{v}, t)] \quad (5.5)$$

onde a perturbação $h_d(\vec{r}, \vec{v}, t)$ pode ser representada por uma onda plana com um vetor de número de onda \vec{q}/a na forma

$$h_d(\vec{r}, \vec{v}, t) = h_d^1(\vec{r}, \vec{v}, t) \exp \left(i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}}{a} \right) \quad (5.6)$$

em que o fator $1/a$ no número de onda reflete o estiramento do comprimento de onda em um universo em expansão e $h_d^1(\vec{r}, \vec{v}, t)$ pode ser dado por uma combinação dos invariantes de colisão da equação de Boltzmann em coordenadas comóveis

$$h_d^1(\vec{r}, \vec{v}, t) \equiv A_d(t) + \vec{B}_d(t) \cdot \left(\vec{v} - \frac{\dot{a}\vec{r}}{a} \right) + D_d(t) \left(\vec{v} - \frac{\dot{a}\vec{r}}{a} \right)^2 \quad (5.7)$$

Definindo o potencial gravitacional como

$$\Phi_0 = \frac{2\pi}{3} G \rho_d r^2 \quad (5.8)$$

e impondo uma certa perturbação

$$\Phi_1(\vec{r}, t) = \phi(t) \exp \left(i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}}{a} \right) \quad (5.9)$$

onde $\phi(t)$ é uma amplitude e, então, o novo potencial gravitacional é

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_0(\vec{r}, t) + \Phi_1(\vec{r}, t) \quad (5.10)$$

Inserindo as equações (5.4)-(5.10) nas equações (5.2) e (5.3), respectivamente,

$$f_d^0 \left(\frac{\partial h_d}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla h_d - \nabla \Phi_0 \cdot \frac{\partial h_d}{\partial \vec{v}} \right) - \nabla \Phi_1 \cdot \frac{\partial f_d^0}{\partial \vec{v}} = -\nu_d f_d^0 h_d \quad (5.11)$$

$$\frac{q^2}{a^2}\phi + 4\pi G(A_d + 3\sigma_d^2 D_d)\rho_d = 0. \quad (5.12)$$

onde os produtos $\nabla\Phi_1$ com h_d e com $\partial f_d^0/d\vec{v}_d$ foram negligenciados.

Tomando a equação (5.11) com o auxilio das equações (5.4) e (5.6)-(5.9), tem-se que

$$\begin{aligned} & \dot{A}_d + \dot{\vec{B}}_d \left(\vec{v} - r \frac{\dot{a}}{a} \right) + \dot{D}_d \left(\vec{v} - r \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{\dot{a}}{a} \left[\vec{B}_d + 2 \left(\vec{v} - r \frac{\dot{a}}{a} \right) D_d \right] \left(\vec{v} - r \frac{\dot{a}}{a} \right) \\ & + \left[A_d + \vec{B}_d \left(\vec{v} - r \frac{\dot{a}}{a} \right) + D_d \left(\vec{v} - r \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\phi}{\sigma_d^2} \right] \frac{i\vec{q}}{a} \left(\vec{v} - r \frac{\dot{a}}{a} \right) \\ & + \nu_d \left[A_d + \vec{B}_d \left(\vec{v} - r \frac{\dot{a}}{a} \right) + D_d \left(\vec{v} - r \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

definindo $B_d = \vec{B}_d(t) \cdot \vec{q}$, $A_d = A_d(t)$, $D_d = D_d(t)$ e $\phi = \phi(t)$, multiplicando pelos invariantes de colisão da equação de Boltzmann em coordenadas comóveis $(1, (\vec{v} - \frac{\dot{a}}{a}\vec{r})$ e $(\vec{v} - \frac{\dot{a}}{a}\vec{r})^2$) e integrando em $d\vec{v}$, resultam em

$$\begin{cases} \dot{A}_d + 3\sigma_d^2 \dot{D}_d + i\frac{\sigma_d^2}{a} B_d - 6\frac{\dot{a}}{a} \sigma_d^2 D_d + \nu_d (A_d + 3\sigma_d^2 D_d) = 0 \\ \dot{B}_d + i\frac{q^2}{a} \left[A_d + 5\sigma_d^2 D_d + \frac{\phi}{\sigma_d^2} \right] - \frac{\dot{a}}{a} B_d + \nu_d B_d = 0 \\ 3\dot{A}_d + 15\sigma_d^2 \dot{D}_d + 5i\frac{\sigma_d^2}{a} B_d - 30\frac{\dot{a}}{a} \sigma_d^2 D_d + \nu_d (3A_d + 15\sigma_d^2 D_d) = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

de onde é possível verificar a primeira e a terceira equações do sistema de equações (5.14) são linearmente dependentes e, multiplicando a primeira por 5, constata-se que $\dot{A}_d = -\nu_d A_d$, ou seja, $A_d = Ee^{-\nu_d t}$, onde E é uma constante de integração.

Isolando B da primeira equação de (5.14), encontrando \dot{B} , isolando ϕ de (5.12), definindo o contraste de densidade como $\delta_d = \rho_d/\bar{\rho}_d = 1 + 3\sigma_d^2 D_d$, então

$$\dot{\delta}_d = 3\sigma_d^2 \dot{D}_d - \frac{6\dot{a}\sigma_d^2}{a} D_d \quad (5.15)$$

e

$$\ddot{\delta}_d = 3\sigma_d^2 \ddot{D}_d - \frac{12\dot{a}\sigma_d^2}{a} \dot{D}_d + \frac{18\dot{a}^2\sigma_d^2}{a^2} D_d - \frac{6\ddot{a}\sigma_d^2}{a} \dot{D}_d \quad (5.16)$$

e substituindo δ_d , $\dot{\delta}_d$ e $\ddot{\delta}_d$ na segunda equação de (5.14), obtém-se

$$\ddot{\delta}_d + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_d + \frac{q^2\sigma_d^2}{5a^2}(5\delta_d - 2Ee^{-\nu_d t}) - 4\pi G\rho_d\delta_d + \nu_d \left[\delta_d \left(\frac{2\dot{a}}{a} + \nu_d \right) + 2\dot{\delta}_d \right] = 0 \quad (5.17)$$

que, juntamente às normalizações

$$\lambda_J^0 = \frac{2\pi v_s^0}{\sqrt{4\pi G \rho_d^0}}; \quad v_s^0 = \sigma_d^0 \sqrt{\frac{5}{3}} \quad (5.18)$$

$$\lambda_0 = \frac{2\pi a_0}{q}; \quad \tau = t \sqrt{6\pi G \rho_d^0}; \quad a = a_0 [6\pi G \rho_d^0 t^2]^{1/3} \quad (5.19)$$

e à definição $d/d\tau ='$, $d/d\tau^2 =''$ e multiplicando por τ^2 tem-se que

$$\tau^2 \delta_d'' + \frac{4}{3} \tau \delta_d' + \frac{2}{25 \tau^{2/3}} \left(\frac{\lambda_J^0}{\lambda_0} \right)^2 [5\delta_d - 2E e^{-\mu_d \tau}] - \frac{2}{3} \delta_d + 2\mu_d \delta_d' + \frac{4\mu_d \delta_d}{3\tau} + \mu_d^2 \delta_d = 0 \quad (5.20)$$

onde foi assumido que $\sigma_d \propto 1/a$, $\mu_d = \nu_d / (\sqrt{6\pi G \rho_d^0})$ e, em diante, E será definido como $E = 1$ para facilitar a compreensão das análises futuras.

5.2 Análise dos Impactos de μ_d sobre a Evolução do Contraste de Densidade

Conforme anteriormente descrito, μ_d nada mais é que

$$\mu_d = \frac{\nu_d}{\sqrt{6\pi G \rho_d^0}} \quad (5.21)$$

onde ν_d é a frequência de colisão das partículas de matéria escura, G a constante gravitacional universal que possui intensidade $6,67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ e ρ_d^0 é a densidade de ME.

Kremer [84] descreve a frequência de colisão por unidade de tempo como

$$\nu = n\pi d^2 \bar{g} \quad (5.22)$$

onde ν é a frequência de colisão, n a densidade numérica de partículas, d o diâmetro molecular e \bar{g} a velocidade média relativa (usualmente da ordem da velocidade térmica \bar{c}).

A velocidade térmica pode ser calculada, ainda segundo Kremer [84], como

$$\bar{c} = \frac{8kT}{\pi m} \quad (5.23)$$

onde k é a constante de Boltzmann com valor aproximado de $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$, T a temperatura e m a massa da partícula.

Contudo, a massa da partícula (de acordo com a equação (5.23)) e o diâmetro molecular

da ME (de acordo com a equação (5.22)) são desconhecidos e, para analisar os efeitos do aumento da frequência de colisão, são tomados os valores de $\mu_d = 1 \times 10^{-3}$, 5×10^{-3} e 1×10^{-2} para μ_d , conforme apresentado na figura 5.1 para o caso de $\lambda_J = 0,1\lambda_0$.

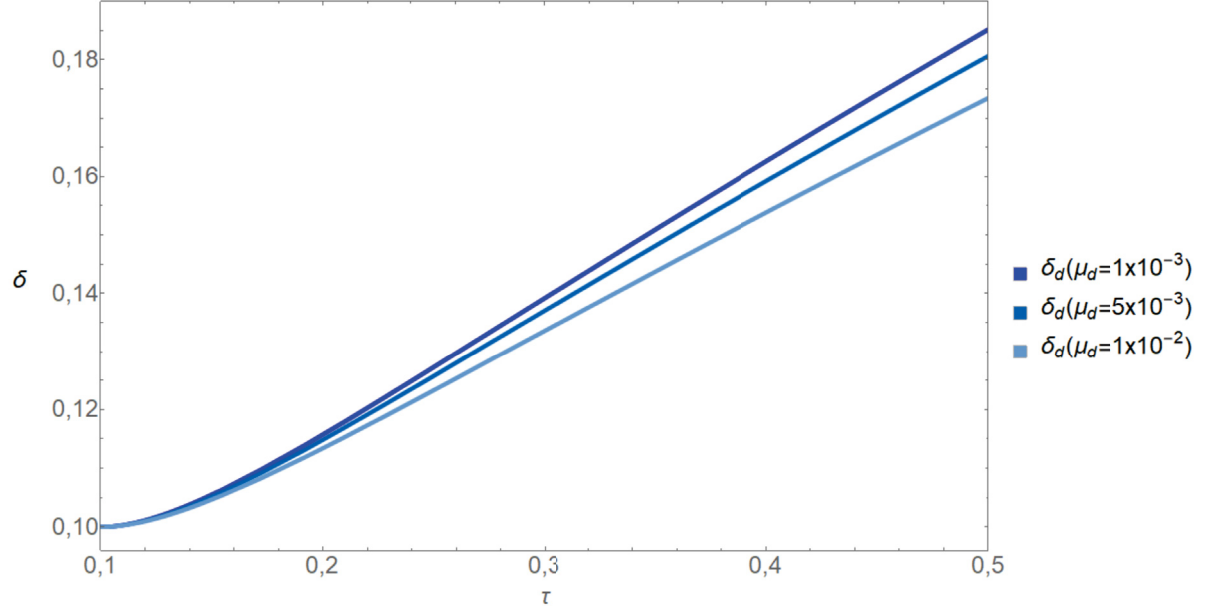


Figura 5.1: Análise da dependência do contraste de densidade em função do tempo adimensional com $\lambda_J = 0,1\lambda_0$ para os valores 1×10^{-3} , 5×10^{-3} e 1×10^{-2} de μ_d .

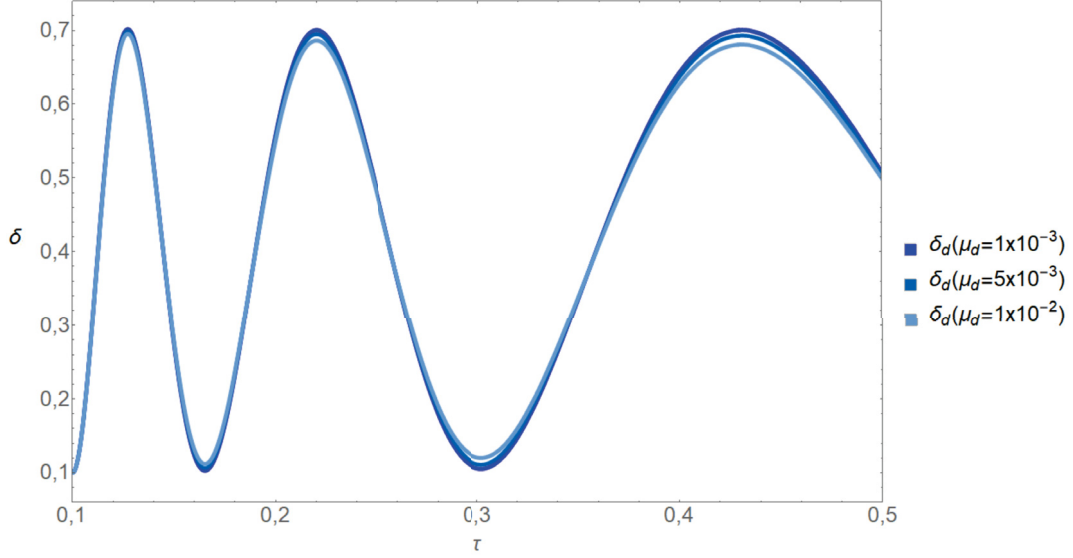


Figura 5.2: Análise da dependência do contraste de densidade em função do tempo adimensional com $\lambda_J = 10,0\lambda_0$ para os valores 1×10^{-3} , 5×10^{-3} e 1×10^{-2} de μ_d .

A figura 5.1 permite verificar que a inserção da auto-interação da matéria escura reduz o crescimento exponencial do contraste de densidade, conforme o esperado.

A figura 5.2 retrata a mesma situação para $\lambda_J = 10\lambda_0$. Observa-se, a partir desta figura, uma constante redução de amplitude da onda de propagação do σ_d . Outro aspecto interessante é a não dependência da frequência da onda de propagação do valor de σ_d .

5.3 Discussão

A inserção da auto-interação da ME no sistema auto-gravitante demonstrou que a equação (5.20) retoma a forma apresentada no capítulo 3 pela equação (3.84) se $\mu_b = 0$.

Mesmo verificando que contribuição de μ_d é pequena, seu efeito pôde ser verificado nas figuras 5.1 e 5.2. O efeito da intensidade de μ_b é inversamente proporcional à intensidade da propagação do σ_d para o caso $\lambda_J = 0,1\lambda_0$. Contudo, o efeito de $\mu_d = 1 \times 10^{-3}$ é muito próximo do efeito de $\mu_d = 0$ (caso observado no item 3 deste trabalho), conforme será demonstrado no item 6.2.

Conclusões

6.1 Conclusões acerca do Modelo Composto por ME e MB não Colisionais em uma Cosmologia EdS

O modelo de um sistema esférico composto por MB e ME não interagentes nem auto-interagentes inseridos em um meio homogêneo e isotrópico em expansão foi um aprimoramento do modelo de um sistema esférico composto por um componente não auto-interagente inserido em um meio homogêneo e isotrópico em expansão descrito por Kremer [60] e descrito no item 3.6 deste trabalho.

Realizando uma comparação entre as figuras 3.6, 4.1 e 4.2, é possível encontrar as figuras comparativas que seguem

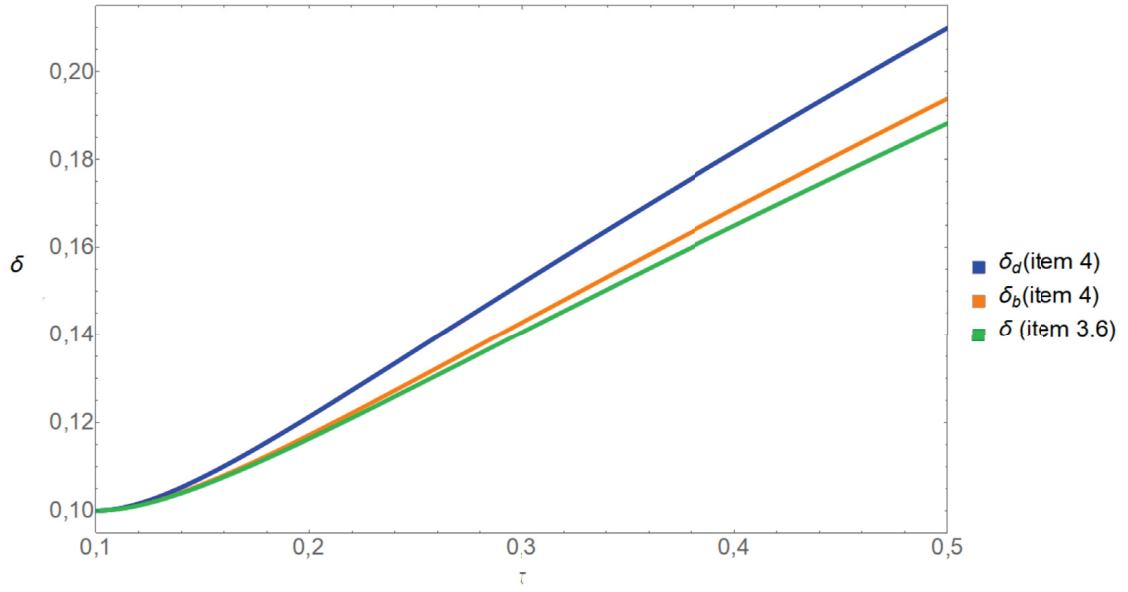


Figura 6.1: Comparação da dependência do δ_d e do δ_b descritos no item 4 com $\sigma_d/\sigma_b = 1,83$ e do contraste de densidade do componente descrito no item 3.6 em função do tempo adimensional com $\lambda_J = 0,1\lambda_0$.

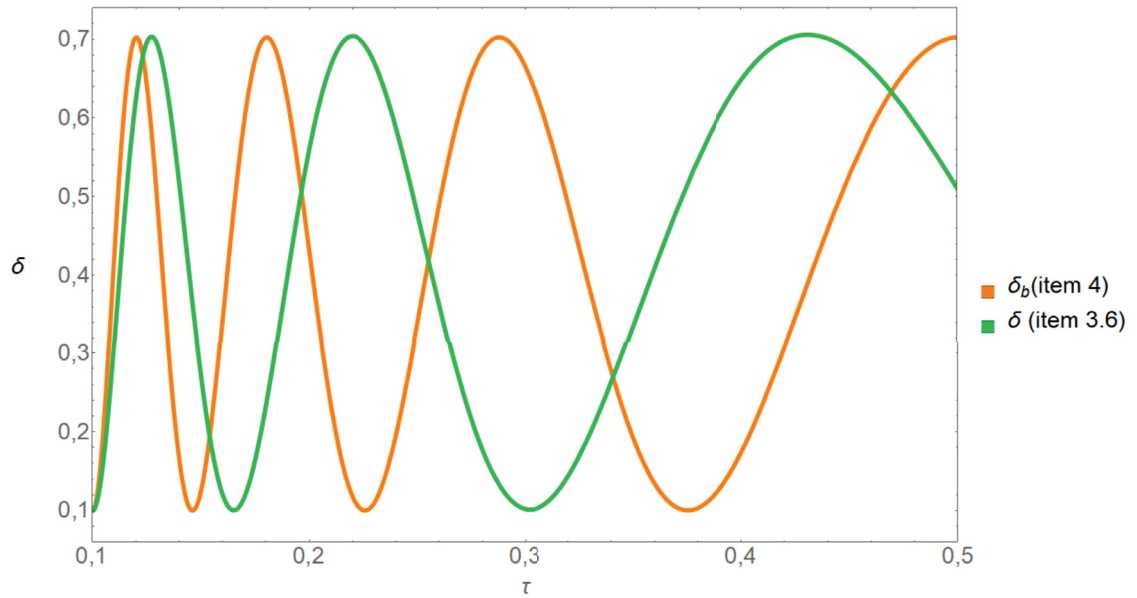


Figura 6.2: Comparação da dependência do δ_b descrita no item 4 com $\sigma_d/\sigma_b = 1,83$ e da MB descrita no item 3.6 em função do tempo adimensional com $\lambda_J = 10\lambda_0$.

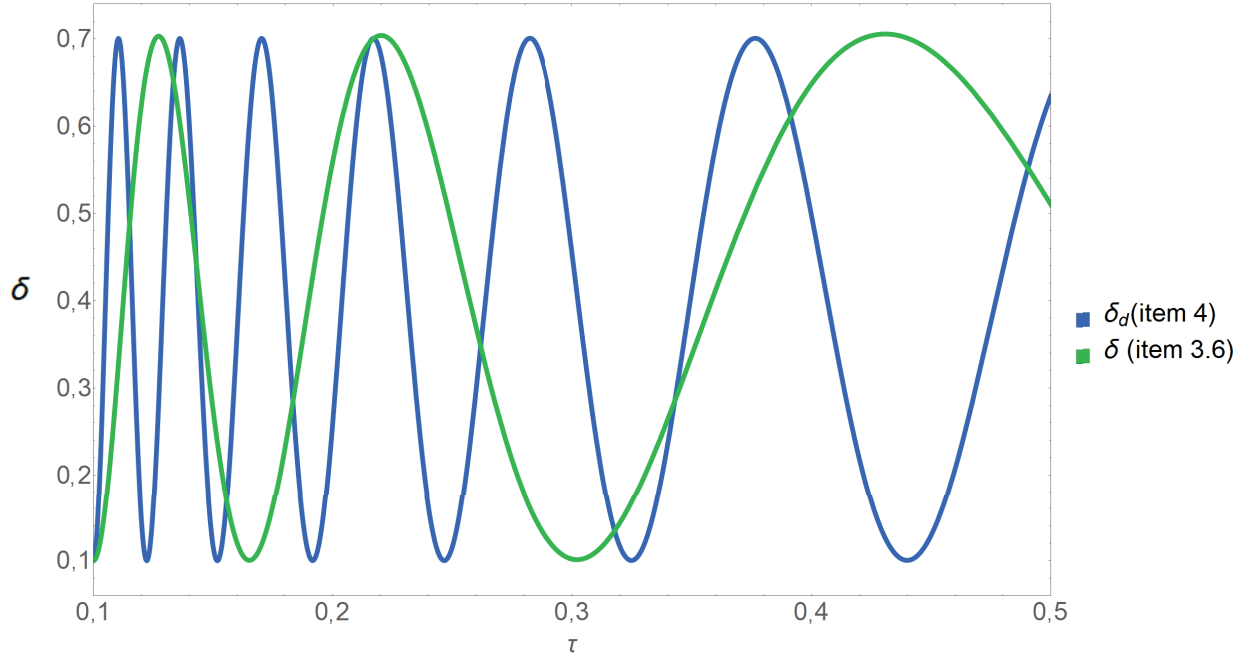


Figura 6.3: Comparação da dependência do δ_d descrita no item 4 com $\sigma_d/\sigma_b = 1,83$ e da MB descrita no item 3.6 em função do tempo adimensional com $\lambda_J = 10\lambda_0$.

Assim, afere-se, por intermédio da verificação da propagação do δ_b , que houve um aumento da frequência de oscilação desta propagação para $\lambda_J = 10\lambda_0$ no item 4 assim como δ_d em relação ao item 3.6, enquanto, para $\lambda_J = 0,1\lambda_0$, a propagação do contraste de densidade se deu de forma mais acelerada para ambos os componentes, conforme o esperado.

Um fato curioso acerca do item 4.2 é que, se $\sigma_d/\sigma_b = 2,4$ e $\lambda_J = 10\lambda_0$, o δ_b aqui descrita se sobrepõe exatamente sobre o modelo descrito por Kremer [60], mas não são equivalentes para $\lambda_J = 0,1\lambda_0$.

Por outro lado, a tabela 4.1 pode ser comparada com a tabela 3.1 e pode-se observar que, para $\sigma_d/\sigma_b = 1,00$, o valor da razão M_J^{db}/M_J^d é exatamente o mesmo, corroborando o resultado encontrado na equação (4.30). Contudo, para valores da razão das velocidades de dispersão maiores que 1,00, o sistema inserido em um universo estático tende a possuir a razão M_J^{db}/M_J^d menor que para um universo em expansão, conforme o gráfico que segue

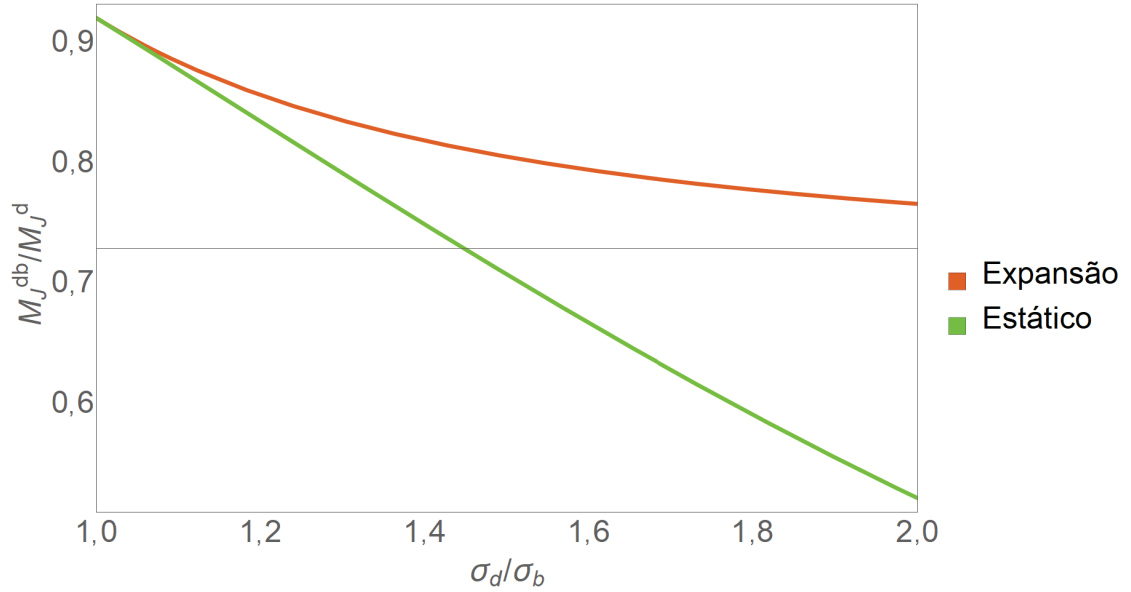


Figura 6.4: Análise da dependência das Massas de Jeans para sistemas compostos de MB e ME em um universo em expansão e em um universo estático [60] para com a razão σ_d/σ_b .

Este resultado indica que, em universo estático com $\sigma_d/\sigma_b > 1,00$, a massa requerida para iniciar o colapso é menor que a massa requerida para iniciar o colapso em um universo em expansão. O gráfico apresenta uma assíntota em $M_J^{db}/M_J^d = 0,7160$ para um universo em expansão, diferentemente do universo estático onde a dependência de σ_d/σ_b é praticamente linear neste intervalo.

6.2 Conclusões acerca do Modelo Composto por ME Auto-Interagente em uma Cosmologia EdS

O modelo de um sistema esférico composto por ME auto-interagente inserido em um meio homogêneo e isotrópico em expansão foi outro aprimoramento do modelo de um sistema esférico composto por um componente não auto-interagente inserido em um meio homogêneo e isotrópico em expansão descrito por Kremer [60] e descrito no item 3.6 deste trabalho.

Realizando uma comparação entre as figuras 3.6, 5.1 e 5.2, é possível encontrar as figuras comparativas que seguem

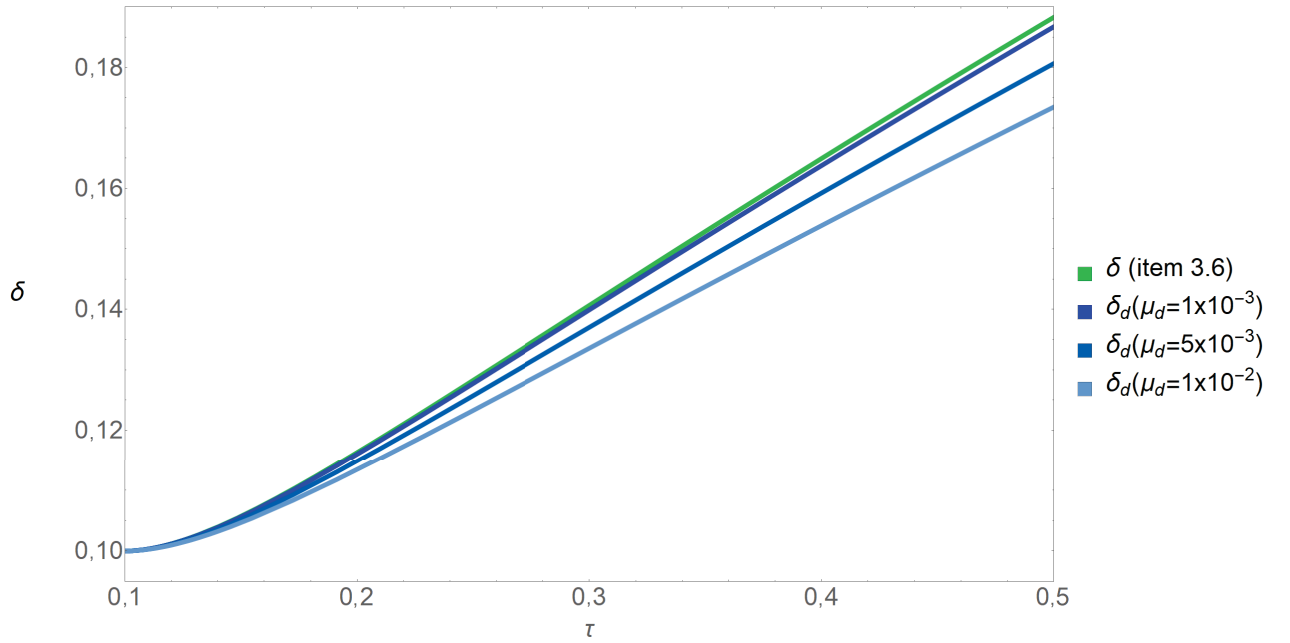


Figura 6.5: Comparação da dependência de μ_d para com δ_d e do contraste de densidade do componente descrito no item 3.6 em função do tempo adimensional com $\lambda_J = 0,1\lambda_0$.

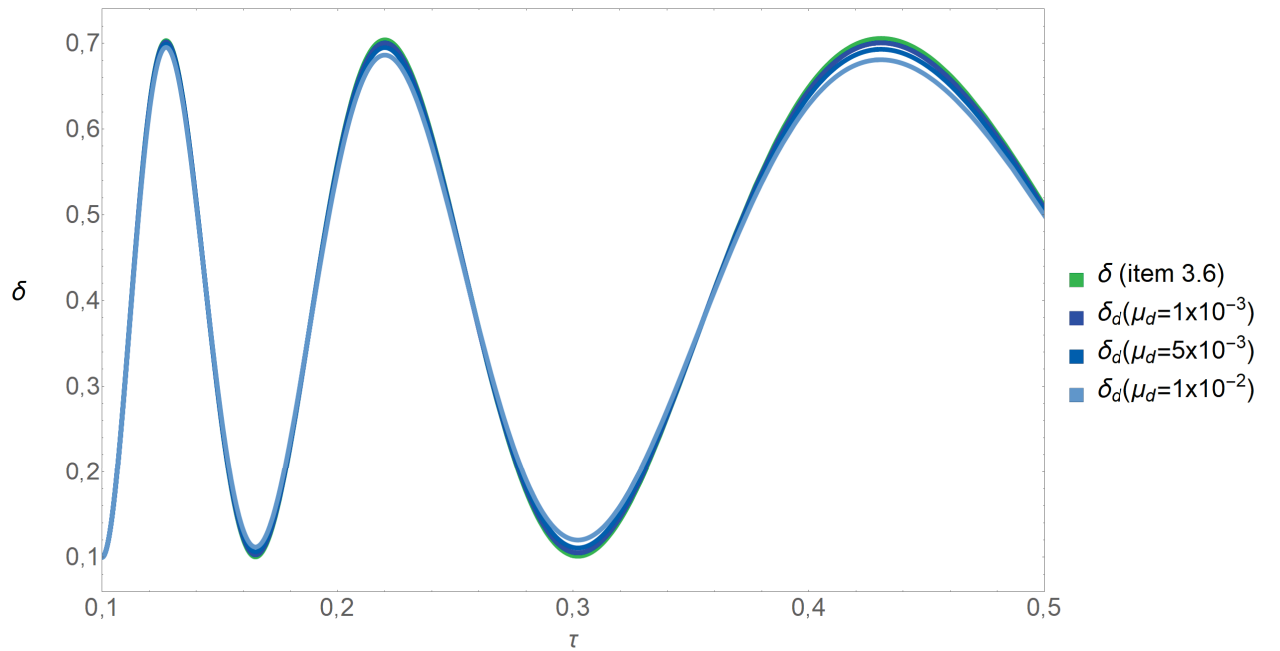


Figura 6.6: Comparação da dependência de μ_d para com δ_d e do contraste de densidade do componente descrito no item 3.6 em função do tempo adimensional com $\lambda_J = 10\lambda_0$.

Assim, afere-se, por intermédio da verificação da propagação do δ_b , que houve uma redução da amplitude da desta propagação para $\lambda_J = 10\lambda_0$ no item 5 assim como δ_d em relação ao item 3.6, enquanto, para $\lambda_J = 0,1\lambda_0$, a propagação do contraste de densidade se deu de forma menos acelerada, conforme o esperado já que o aumento da frequência de colisão está intimamente relacionado ao aumento da viscosidade do sistema.

Outro fato interessante descrito pela equação (5.20) está presente na figura 5.2, na qual pode-se observar um declínio contínuo na amplitude da onda de propagação do δ_d que é diretamente proporcional à μ_d .

Este fato é muito similar ao descrito por Kremer, Richarte e Teston [73], onde discute-se o impacto da viscosidade sobre a propagação do contraste de densidade para um universo estático. Entretanto, esta similaridade era-se de esperar, vez que a frequência de colisão está intimamente relacionada à viscosidade.

6.3 Discussões Finais

Apoiando-se sobre os ombros de grandes nomes e diversos anos de estudo, este trabalho produz um pequeno avanço na compreensão da Instabilidade de Jeans para sistemas esféricos de componentes autogravitantes a partir da equação de Boltzmann e da equação de Poisson inseridos em um meio em expansão.

A formação de estruturas neste sistema é comumente associada à formação de galáxias ou aglomerados de galáxias, portanto, este tema é de fundamental importância para descrever todas as demais estruturas presentes no universo atual.

Caso os modelos aqui estudados possam assumir um papel representativo na física da formação de galáxias, existem algumas novas características que se pode verificar.

Segundo o modelo descrito no item 4, as galáxias podem se formar em tempos posteriores (em relação ao Big Bang) aos subjetivamente inferidos por Kremer [60], onde suas relações entre M_J^{db}/M_J^d e σ_d/σ_b são mais animadoras, pois, para maiores valores de σ_d/σ_b , M_J^{db}/M_J^d decresce de forma abrupta.

Já o modelo discutido no item 5 descreve uma situação muito similar à encontrada por Kremer, Richarte e Teston [73] que verificaram o impacto da viscosidade sobre um sistema

muito parecido em que o aumento da frequência de colisão gera uma redução da propagação do contraste de densidade e faz com que este contraste tenda ao equilíbrio. Contudo, era-se de esperar que os resultados fossem parecidos, pois a frequência de colisão das partículas de um sistema está intimamente relacionada à viscosidade do mesmo.

A dependência deste último modelo para com μ_d também é de extrema importância, vez que altos valores de μ_d acarretam em uma tendência da ME se aproximar do equilíbrio e então os *halos* de ME teriam maior dificuldade de serem formados, conforme sugere a Λ CDM.

Trabalhos futuros terão ênfase em tratar um sistema esférico composto por MB e ME de partículas individualmente auto-interagentes inseridos em um meio homogêneo e isotrópico em expansão (Cosmologia EdS) a partir das equações de Boltzmann e de Poisson e reavaliar a dependência da razão M_J/M_{200} para com o redshift.

REFERÊNCIAS

- [1] EINSTEIN, A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. **Annalen Der Physik**, v. 322, n. 10, p.891-921, 1905. Wiley.
- [2] EINSTEIN, A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. **Annalen Der Physik**, v. 354, n. 7, p.769-822, 1916.
- [3] EINSTEIN, A. Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle? **Akademie-Vorträge**, p.167-175, 2006.
- [4] EINSTEIN, A.. Bemerkung über periodische Schwankungen der Mondlänge, welche bisher nach der Newtonschen Mechanik nicht erklärbar schienen. **Preußische Akademie der Wissenschaften** (Berlin). Physikalisch-Mathematische Klasse, Sitzungsberichte, Doc. 18, p. 433-436, 1919.
- [5] EINSTEIN, A.. Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. **Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften** (Berlin), Sitzungsberichte, Doc. 24, p.831-839, 1915.
- [6] EINSTEIN, A.. Über Gravitationswellen. **Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften** (Berlin), Sitzungsberichte, Doc. 1, p.154-157, 1918. Bemerkung über periodische Schwankungen der Mondlänge, welche bisher nach der Newtonschen Mechanik nicht erklärbar schienen.
- [7] ABBOTT, B. P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. **Physical Review Letters**, v. 116, n. 6, p.1-16, 2016.

- [8] RYDEN, B. **Introduction to Cosmology**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
- [9] MATHER, J. C. et al. Measurement of the cosmic microwave background spectrum by the COBE FIRAS instrument. **The Astrophysical Journal**, v. 420, p.439-444, 1994.
- [10] WHEELER, R. H. et al. A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s. **Advances in Physics**, v. 73, n. 1, p. 1143, 1953.
- [11] JEANS, J. H.. The Stability of a Spherical Nebula. **Philosophical Transactions Of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 199, n. 312-320, p.1-53, 1902.
- [12] BONNOR, W. B.. The Formation of the Nebulae. **Zeitschrift für Astrophysik**, v. 39, p.143-159. 1956.
- [13] WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. 1. ed. New York: Wiley, 1972.
- [14] PLANCK COLLABORATION. Astrophysics Special feature Planck 2015 results. **Astronomy & Astrophysics**, v. 594, n. A13, 2016
- [15] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M.. **The Classical Theory of Fields**. 2. ed. Oxford Boston: Butterworth Heinemann, 2000.
- [16] EINSTEIN, A.; de SITTER, W. On the Relation between the Expansion and the Mean Density of the Universe. **Proceedings Of The National Academy Of Sciences**, v. 18, n. 3, p.213-214, 1932.
- [17] BERGSTRÖM, L.. Non-baryonic dark matter: observational evidence and detection methods. **Reports On Progress In Physics**, v. 63, n. 5, p.793-841, 2000.
- [18] BERTONE, G.; HOOPER, D.; SILK, J.. Particle dark matter: evidence, candidates and constraints. **Physics Reports**, v. 405, n. 5-6, p.279-390, 2005.

- [19] PLANCK COLLABORATION; ADE, P. A. R.; AGHANIM, N.; et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. **Astronomy & Astrophysics**, v. 571, p. 1–69, 2013.
- [20] BARNETT, R. M.; CARONE, C. D.; GROOM, D. E.; et al. Review of particle physics. **Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology**, v. 54, n. 1, p. 1–708, 1996.
- [21] STEIGMAN, G.; TURNER, M. S. Cosmological constraints on the properties of weakly interacting massive particles. **Nuclear Physics B**, v. 253, p.375-386, 1985.
- [22] JUNGMAN, G.; KAMIONKOWSKI, M.; GRIEST, K.. Supersymmetric dark matter. **Physics Reports**, v. 267, n. 5-6, p.195-373, 1996.
- [23] RIESS, Adam G. et al. A 2.4 % Determination of the Local Value of the Hubble Constant. **The Astrophysical Journal**, v. 826, n. 1, p.56-84, 2016.
- [24] PARSONS, W. 500, 1850. In: **The Scientific Papers of William Parsons, Third Earl of Rosse 1800-1867**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- [25] BUTA, R. J. Galaxy Morphology. In: **Planets, Stars, and Stellar Systems**. Netherlands: Springer, vol. 6, 2011.
- [26] BLOCK, D. L. et al. **Penetrating Bars through Masks of Cosmic Dust: The Hubble Tuning Fork Strikes a New Note**. 2004th. ed. Dordrecht: Springer, 2004.
- [27] SILK, J.. Challenges in Cosmology from the Big Bang to Dark Energy, Dark Matter and Galaxy Formation. **Proceedings Of The 14th International Symposium On Nuclei In The Cosmos** (nic2016), p.1-13, 2017.
- [28] BLUMENTHAL, G. R. et al. Formation of galaxies and large-scale structure with cold dark matter. **Nature**, v. 311, n. 5986, p.517-525, 1984.
- [29] SPRINGEL, V. et al. Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. **Nature**, v. 435, n. 7042, p.629-636, 2005.

- [30] MESINGER, A.; BRYAN, G. L.; HAIMAN, Z. Relic H ii regions and radiative feedback at high redshifts. **Monthly Notices Of The Royal Astronomical Society**, v. 399, n. 3, p.1650-1662, 2009.
- [31] MESINGER, A.; DIJKSTRA, M.. Ultraviolet radiative feedback during the advanced stages of reionization. **Monthly Notices Of The Royal Astronomical Society**, v. 390, n. 3, p.1071-1080, 2008.
- [32] DIEMAND, J.; MOORE, B.; STADEL, J. Earth-mass dark-matter haloes as the first structures in the early Universe. **Nature**, v. 433, n. 7024, p.389-391, 2005.
- [33] RICOTTI, M.; GNEDIN, N. Y.; SHULL, J. M.. The Fate of the First Galaxies. I. Self-consistent Cosmological Simulations with Radiative Transfer. **The Astrophysical Journal**, v. 575, n. 1, p.33-48, 2002.
- [34] RICOTTI, M.; GNEDIN, N. Y.; SHULL, J. M.. The Fate of the First Galaxies. III. Properties of Primordial Dwarf Galaxies and Their Impact on the Intergalactic Medium. **The Astrophysical Journal**, v. 685, n. 1, p.21-39, 2008.
- [35] KITAYAMA, T. et al. The Structure and Evolution of Early Cosmological HiiRegions. **The Astrophysical Journal**, v. 613, n. 2, p.631-645, 2004.
- [36] WISE, J. H.; ABEL, T.. Resolving the Formation of Protogalaxies. I. Virialization. **The Astrophysical Journal**, v. 665, n. 2, p.899-910, 2007.
- [37] WISE, J. H.; ABEL, T.. Resolving the Formation of Protogalaxies. III. Feedback from the First Stars. **The Astrophysical Journal**, v. 685, n. 1, p.40-56, 2008.
- [38] GREIF, T. H. et al. The First Galaxies: Chemical Enrichment, Mixing, and Star Formation. **The Astrophysical Journal**, v. 716, n. 1, p.510-520, 2010.
- [39] IYE, M. et al. A galaxy at a redshift $z = 6.96$. **Nature**, v. 443, n. 7108, p.186-188, 2006.
- [40] BOUWENS, R. J. et al. $Z \approx 7$ Galaxy Candidates from Nicmos Observations over the HDF-south and the CDF-south and HDF-north Goods Fields. **The Astrophysical Journal**, v. 725, n. 2, p.1587-1599, 2010.

- [41] LEHNERT, M. D. et al. Spectroscopic confirmation of a galaxy at redshift $z = 8.6$. **Nature**, v. 467, n. 7318, p.940-942, 2010.
- [42] OESCH, P. A. et al. A Remarkably Luminous Galaxy at $z=11.1$ Measured with Hubble Space Telescope Grism Spectroscopy. **The Astrophysical Journal**, v. 819, n. 2, p.129-141, 2016.
- [43] MIRALDA-ESCUDE, J.. The Dark Age of the Universe. **Science**, v. 300, n. 5627, p.1904-1909, 2003.
- [44] NAOZ, S.; NOTER, S.; BARKANA, R.. The first stars in the Universe. **Monthly Notices Of The Royal Astronomical Society: Letters**, v. 373, n. 1, p.L98-L102, 2006.
- [45] GAO, L. et al. The first generation of stars in the cold dark matter cosmology. **Monthly Notices Of The Royal Astronomical Society**, v. 378, n. 2, p.449-468, 2007.
- [46] PADMANBHAN, T.. **Structure Formation in the Universe**. 1. ed. Cambridge: University Press, 1993.
- [47] LACEY, C. G. et al. The evolution of Lyman-break galaxies in the cold dark matter model. **Monthly Notices Of The Royal Astronomical Society**, v. 412, n. 3, p.1828-1852, 2011.
- [48] COLES, P.; LUCCHIN, F. **The Origin and Evolution of Cosmic Structure**. 2. ed. Chichester: Wiley, 2002.
- [49] LIFSHITZ, E.. Republication of: On the gravitational stability of the expanding universe. **General Relativity And Gravitation**, v. 49, n. 2, p.1-20, 2017.
- [50] HAWKING, S. **Properties of expanding universes**. 1966. 119 f. Tese (Doutorado em Física) - Physics, University Of Cambridge, Cambridge, 1966.
- [51] LIFSHITZ, E. M.; KHALATNIKOV, I. M. Investigations in relativistic cosmology. **Advances In Physics**, v. 12, n. 46, p.185-249, 1963.

- [52] IRVINE, W. M.. Local irregularities in an expanding universe. **Annals Of Physics**, v. 32, n. 2, p.322-347, 1965.
- [53] BINNEY, J.; TREMAINE, S. **Galactic Dynamics**. 2. ed. Princeton: Princeton University Press, 1994.
- [54] OWEN, J. M.; VILLUMSEN, J. V.. Baryons, Dark Matter, and the Jeans Mass in Simulations of Cosmological Structure Formation. **The Astrophysical Journal**, v. 481, n. 1, p.1-21, 1997.
- [55] PEACOCK, J. A.. **Cosmological Physics**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [56] TRIGGER, S. A. et al. Kinetic theory of Jeans instability. **Physical Review E**, v. 69, n. 6, p.1-6, 2004.
- [57] LONGAIR, M. S.. **Galaxy Formation**. 2. ed. Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [58] CAPOZZIELLO, S. et al. Jeans analysis of self-gravitating systems in $f(R)$ gravity. **Physical Review D**, v. 85, n. 4, p.1-9, 2012.
- [59] KREMER, G. M.; ANDRÉ, R.. Analysis of instability of systems composed by dark and baryonic matter. **International Journal Of Modern Physics D**, v. 25, n. 01, p.1-7, 2016.
- [60] KREMER, G. M.. Analysis of Jeans instability from the Boltzmann equation. **AIP Conference Proceedings**, v. 1786, p.1-10, 2016.
- [61] KREMER, G. M.. **Uma Introdução à Equação de Boltzmann**. São Paulo: Edusp, 2005.
- [62] BHATNAGAR, P. L.; GROSS, E. P.; KROOK, M.. A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. **Physical Review**, v. 94, n. 3, p.511-525, 1954.
- [63] GUNN, J. E.; GOTT, J. R. III. On the Infall of Matter Into Clusters of Galaxies and Some Effects on Their Evolution. **The Astrophysical Journal**, v. 176, p.1-20, 1972.

- [64] COLE, S.; LACEY, C.. The structure of dark matter haloes in hierarchical clustering models. **Monthly Notices Of The Royal Astronomical Society**, v. 281, n. 2, p.716-736, 1996.
- [65] NAVARRO, J. F.; FRENK, C. S.; WHITE, Simon D. M.. The Structure of Cold Dark Matter Halos. **The Astrophysical Journal**, v. 462, p.563-585, 1996.
- [66] ZWICKY, F.. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. **Helvetica Physica Acta**, v. 6, p. 110-127, 1933.
- [67] SCHWARZSCHILD, M.. Mass distribution and mass-luminosity ratio in galaxies. **The Astronomical Journal**, v. 59, p.273-285, 1954.
- [68] WHITE, M.. The mass of a halo. **Astronomy & Astrophysics**, v. 367, n. 1, p.27-32, 2001.
- [69] ETTORI, S. et al. Mass Profiles and c-MDM Relation in X-ray luminous galaxy clusters. **Astronomy & Astrophysics**, v. 524, p.1-18, 2010.
- [70] NAVARRO, J. F.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M.. A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering. **The Astrophysical Journal**, v. 490, n. 2, p.493-508, 1997.
- [71] EFSTATHIOU, G. et al. Numerical techniques for large cosmological N-body simulations. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 57, p.241-261, 1985.
- [72] LECCARDI, A.; MOLENDI, S.. Radial temperature profiles for a large sample of galaxy clusters observed with XMM-Newton. **Astronomy & Astrophysics**, v. 486, n. 2, p.359-373, 2008.
- [73] KREMER, Gilberto M.; RICHARTE, Martín G.; TESTON, Felipe. Jeans instability in a universe with dissipation. **Physical Review D**, v. 97, n. 2, p.1-17, 2018.
- [74] KING III, C. et al. Stellar Velocity Dispersion and Anisotropy of the Milky Way Inner Halo. **The Astrophysical Journal**, v. 813, n. 2, p.89-104, 2015.

- [75] BATTAGLIA, G. et al. The radial velocity dispersion profile of the Galactic halo: constraining the density profile of the dark halo of the Milky Way. **Monthly Notices Of The Royal Astronomical Society**, v. 364, n. 2, p.433-442, 2005.
- [76] GNEDIN, O. Y. et al. The Mass Profile of the Galaxy to 80 Kpc. **The Astrophysical Journal**, v. 720, n. 1, p.108-112, 2010.
- [77] GEBHARDT, K. et al. A Relationship between Nuclear Black Hole Mass and Galaxy Velocity Dispersion. **The Astrophysical Journal**, v. 539, n. 1, p.13-16, 2000.
- [78] KAMIONKOWSKI, M.; KINKHABWALA, A.. Galactic halo models and particle dark-matter detection. **Physical Review D**, v. 57, n. 6, p.3256-3263, 1998.
- [79] BERNABEI, R et al. Searching for WIMPs by the annual modulation signature. **Physics Letters B**, v. 424, n. 1-2, p.195-201, 1998.
- [80] BEGEMAN, K. G.; BROEILS, A. H.; SANDERS, R. H.. Extended rotation curves of spiral galaxies: dark haloes and modified dynamics. **Monthly Notices Of The Royal Astronomical Society**, v. 249, n. 3, p.523-537, 1991.
- [81] READ, J. I. et al. Thin, thick and dark discs in Λ CDM. **Monthly Notices Of The Royal Astronomical Society**, v. 389, n. 3, p.1041-1057, 2008.
- [82] BRUCH, Tobias et al. DETECTING THE MILKY WAY'S DARK DISK. **The Astrophysical Journal**, v. 696, n. 1, p.920-923, 2009.
- [83] LING, F.-s et al. Dark matter direct detection signals inferred from a cosmological N-body simulation with baryons. **Journal Of Cosmology And Astroparticle Physics**, v. 2010, n. 02, p.012-012, 2010.
- [84] KREMER, G. M.. **An Introduction to the Boltzmann Equation and Transport Processes in Gases**. 2010th. ed. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.
- [85] MAJUMDAR, D. **Dark Matter: An Introduction**. Florida: CRC Press, 2015.
- [86] CAROSI, G.; VAN BIBBER, K.. Microwave Cavity Searches. **Lecture Notes In Physics**, p.135-156, 2008.

- [87] AHARONIAN, F.; BERGSTÖM, L.; DERMER, C.. **Astrophysics at Very High Energies:Saas-Fee Advanced Course 40**. Berlin Heidelberg: Springer, 2013.